

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 15 (Keine Abgabe, Besprechung im Sommersemester)

Aufgabe 83

Die Menge der stetigen Funktionen auf dem Intervall $[a, b]$,

$$C([a, b]) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$$

ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ (vgl. Aufgaben 52 & 59).

Zeigen Sie: $\langle \cdot, \cdot \rangle : C([a, b]) \times C([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) dx$$

ist ein Skalarprodukt.

Aufgabe 84

Zeigen Sie: Die Funktionen $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx), n \in \mathbb{N}$ bilden ein Orthonormalsystem (ONS) in $C([0, 2\pi])$ mit dem Skalarprodukt aus Aufgabe 83.

Aufgabe 85 (Fourierreihen)

Die Funktionen aus Aufgabe 84 bilden nicht nur ein ONS sondern tatsächlich auch die ∞ -dimensionale Verallgemeinerung einer Basis (eine sogenannte Schauderbasis bzw. ein vollständiges ONS)². Sie können nun ein Element aus $f \in C([0, 2\pi])$, d.h. eine stetige Funktion $f(x)$, in diese Basis entwickeln, d.h. die Funktion als Linearkombination der Basisfunktionen darstellen,³

$$f(x) = \frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}} + b_n \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} \right). \quad (*)$$

Die Koeffizienten a_n und b_n erhalten Sie, indem Sie das Skalarprodukt von f mit den Basisvektoren bilden (vgl. Abschnitt 5.5 der Vorlesung), d.h.

$$a_0 = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, f \right\rangle, \quad a_n = \left\langle \frac{\cos(n \cdot)}{\sqrt{\pi}}, f \right\rangle, \quad b_n = \left\langle \frac{\sin(n \cdot)}{\sqrt{\pi}}, f \right\rangle \quad \text{für } n \in \mathbb{N},$$

bzw. explizit

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} \cos(nx) f(x) dx, \quad b_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} \sin(nx) f(x) dx.$$

Man nennt $(*)$ die Fourierreihe von f . Bestimmen Sie die Fourierreihen von

- a) $f(x) = \sin^2 x$
- b)

$$g(x) = \begin{cases} x & , \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & , \quad \frac{\pi}{2} < x \leq \frac{3\pi}{2} \\ x - 2\pi & , \quad \frac{3\pi}{2} < x \leq 2\pi \end{cases}$$

HINWEISE: Für Teil (a) müssen Sie keine Integrale ausrechnen. Skizzieren Sie sich für Teil (b) zunächst den Graph von g und überlegen Sie sich, dass $a_n = 0 \forall n \in \mathbb{N}_0$ und $b_{2n} = 0 \forall n \in \mathbb{N}$ (warum?).

²Eigentlich sollte man hier besser nicht nur von $C([a, b])$ sprechen, sondern von einem "etwas größeren" Funktionenraum...

³Für hinreichend gutartige Funktionen konvergiert die Reihe dann auch wieder gegen die Funktion.