

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Klausur am 15.02.2017

Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift. Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite. Zusätzliches Papier ist jederzeit verfügbar. **Zeigen Sie auch stets Ihren Rechenweg und vereinfachen Sie Ihre Ergebnisse so weit wie möglich!**

Es sind maximal 105 Punkte erreichbar, 84 Punkte $\hat{=}$ 100% ($\hat{=}$ Note 1,0), 50% $\hat{=}$ 42 Punkte sind hinreichend zum Bestehen ($\hat{=}$ Note 4,0).

Erlaubtes Hilfsmittel: Ein handbeschriebenes Blatt (DIN A4).

Bearbeitungszeit: 120 Minuten.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1

(2+5 = 7 Punkte)

Seien $a_1 = a_2 = 1$ und $a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad \forall n \geq 2$.

- a) Bestimmen Sie a_3 , a_4 , a_5 und a_6 .
- b) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion:

$$\sum_{\nu=1}^n (a_\nu)^2 = a_n a_{n+1} \quad \forall n \geq 1.$$

Aufgabe 2

(4+4+4 = 12 Punkte)

Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen.

a)* $f(x) = \log \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)$

b) $g(x) = x \cdot 7^x$

c) $h(x) = \int_0^{x^3} \frac{dt}{1+t^2}$

Aufgabe 3

(3+3+3+3+3 = 15 Punkte)

Bestimmen Sie, falls existent, die folgenden Grenzwerte, oder begründen Sie ggf., warum diese nicht existieren.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)^5}{x^3(1 - e^{x/2})^7}$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1 - \cos x)^5}{x^3(1 - e^{x/2})^7}$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 \sin x - 1}{1 + 7x^3}$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^6 - 2x^3} - \sqrt{x^6 + 3x^3} \right)$

e) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\pi^2 - 4x^2}{\cos x}$

Aufgabe 4

(4+4+4+4 = 16 Punkte)

Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie (d.h. das Ergebnis soll kein Summenzeichen mehr enthalten):

a) $\sum_{\nu=1}^{2017} (-1)^\nu$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!}$

c) $\sum_{\mu=0}^9 \sum_{\nu=\mu}^9 \binom{\nu}{\mu}$

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^n \frac{(-1)^\nu x^\nu y^{n-\nu}}{\nu!(n-\nu)!}$

*Schreiben Sie Ihr Ergebnis als *einen* Bruch.

Aufgabe 5

(4+4+4 = 12 Punkte)

Bestimmen Sie die Taylorreihen von

- a) $\frac{1}{27-x^3}$ und b) $\frac{x}{(1-x)(x+1)}$ um Null, sowie die Taylorreihe von
- c) $\sin x$ um $x_0 = \pi$, und geben Sie an, wo die Reihen konvergieren.

Aufgabe 6

(1+3+2+2+4+3+4 = 19 Punkte)

Wir untersuchen die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3|x| + 4}{2x + |x|}.$$

- a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist $f(x)$ definiert?
- b) Bestimmen Sie alle Asymptoten von f .
- c) Berechnen Sie alle Nullstellen.
- d) Berechnen Sie $f'(x)$.
- e) Bestimmen Sie alle Hoch- und Tiefpunkte.
- f) Zeichnen Sie den Graph der Funktion.
- g) Geben Sie möglichst große Intervalle $A, B \subseteq \mathbb{R}$ mit $-1 \in A$ an, so dass $f : A \rightarrow B$ bijektiv ist. Sei $f^{-1} : B \rightarrow A$ die Umkehrfunktion von f . Bestimmen Sie $f^{-1'}(0)$.

Aufgabe 7

(2+4 = 6 Punkte)

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$.

- a) Berechnen Sie A^2 und A^3 .
- b) Bestimmen Sie alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$, die $A\vec{x} = \vec{b}$ erfüllen.

Aufgabe 8

(4+2+6 = 12 Punkte)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & \alpha \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \alpha & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -\alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

- a) Berechnen Sie $\det A$.
- b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ besitzt A eine Inverse?
- c) Sei nun $\alpha = -1$. Berechnen Sie A^{-1} .

Aufgabe 9

(6 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ mit $A \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $A \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Klausur am 15.02.2017

Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift. Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite. Zusätzliches Papier ist jederzeit verfügbar. **Zeigen Sie auch stets Ihren Rechenweg und vereinfachen Sie Ihre Ergebnisse so weit wie möglich!**

Es sind maximal 105 Punkte erreichbar, 84 Punkte $\hat{=}$ 100% ($\hat{=}$ Note 1,0), 50% $\hat{=}$ 42 Punkte sind hinreichend zum Bestehen ($\hat{=}$ Note 4,0).

Erlaubtes Hilfsmittel: Ein handbeschriebenes Blatt (DIN A4).

Bearbeitungszeit: 120 Minuten.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1

(2+5 = 7 Punkte)

Seien $a_1 = a_2 = 1$ und $a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad \forall n \geq 2$.

- a) Bestimmen Sie a_3 , a_4 , a_5 und a_6 .
- b) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion:

$$\sum_{\nu=1}^n (a_\nu)^2 = a_n a_{n+1} \quad \forall n \geq 1.$$

Aufgabe 2

(4+4+4 = 12 Punkte)

Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen.

a)* $f(x) = \log \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)$

b) $g(x) = x \cdot 7^x$

c) $h(x) = \int_0^{x^3} \frac{dt}{1+t^2}$

Aufgabe 3

(3+3+3+3+3 = 15 Punkte)

Bestimmen Sie, falls existent, die folgenden Grenzwerte, oder begründen Sie ggf., warum diese nicht existieren.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)^5}{x^3(1 - e^{x/2})^7}$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1 - \cos x)^5}{x^3(1 - e^{x/2})^7}$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 \sin x - 1}{1 + 7x^3}$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^6 - 2x^3} - \sqrt{x^6 + 3x^3} \right)$

e) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\pi^2 - 4x^2}{\cos x}$

Aufgabe 4

(4+4+4+4 = 16 Punkte)

Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie (d.h. das Ergebnis soll kein Summenzeichen mehr enthalten):

a) $\sum_{\nu=1}^{2017} (-1)^\nu$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!}$

c) $\sum_{\mu=0}^9 \sum_{\nu=\mu}^9 \binom{\nu}{\mu}$

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^n \frac{(-1)^\nu x^\nu y^{n-\nu}}{\nu!(n-\nu)!}$

*Schreiben Sie Ihr Ergebnis als *einen* Bruch.

Aufgabe 5

(4+4+4 = 12 Punkte)

Bestimmen Sie die Taylorreihen von

- a) $\frac{1}{27-x^3}$ und b) $\frac{x}{(1-x)(x+1)}$ um Null, sowie die Taylorreihe von
- c) $\sin x$ um $x_0 = \pi$, und geben Sie an, wo die Reihen konvergieren.

Aufgabe 6

(1+3+2+2+4+3+4 = 19 Punkte)

Wir untersuchen die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3|x| + 4}{2x + |x|}.$$

- a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist $f(x)$ definiert?
- b) Bestimmen Sie alle Asymptoten von f .
- c) Berechnen Sie alle Nullstellen.
- d) Berechnen Sie $f'(x)$.
- e) Bestimmen Sie alle Hoch- und Tiefpunkte.
- f) Zeichnen Sie den Graph der Funktion.
- g) Geben Sie möglichst große Intervalle $A, B \subseteq \mathbb{R}$ mit $-1 \in A$ an, so dass $f : A \rightarrow B$ bijektiv ist. Sei $f^{-1} : B \rightarrow A$ die Umkehrfunktion von f . Bestimmen Sie $f^{-1'}(0)$.

Aufgabe 7

(2+4 = 6 Punkte)

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$.

- a) Berechnen Sie A^2 und A^3 .
- b) Bestimmen Sie alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$, die $A\vec{x} = \vec{b}$ erfüllen.

Aufgabe 8

(4+2+6 = 12 Punkte)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & \alpha \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \alpha & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -\alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

- a) Berechnen Sie $\det A$.
- b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ besitzt A eine Inverse?
- c) Sei nun $\alpha = -1$. Berechnen Sie A^{-1} .

Aufgabe 9

(6 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ mit $A \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $A \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Klausur am 15.02.2017

Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift. Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite. Zusätzliches Papier ist jederzeit verfügbar. **Zeigen Sie auch stets Ihren Rechenweg und vereinfachen Sie Ihre Ergebnisse so weit wie möglich!**

Es sind maximal 105 Punkte erreichbar, 84 Punkte $\hat{=}$ 100% ($\hat{=}$ Note 1,0), 50% $\hat{=}$ 42 Punkte sind hinreichend zum Bestehen ($\hat{=}$ Note 4,0).

Erlaubtes Hilfsmittel: Ein handbeschriebenes Blatt (DIN A4).

Bearbeitungszeit: 120 Minuten.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1

(2+5 = 7 Punkte)

Seien $a_1 = a_2 = 1$ und $a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad \forall n \geq 2$.

- a) Bestimmen Sie a_3 , a_4 , a_5 und a_6 .
- b) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion:

$$\sum_{\nu=1}^n (a_\nu)^2 = a_n a_{n+1} \quad \forall n \geq 1.$$

Aufgabe 2

(4+4+4 = 12 Punkte)

Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen.

a)* $f(x) = \log \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)$

b) $g(x) = x \cdot 7^x$

c) $h(x) = \int_0^{x^3} \frac{dt}{1+t^2}$

Aufgabe 3

(3+3+3+3+3 = 15 Punkte)

Bestimmen Sie, falls existent, die folgenden Grenzwerte, oder begründen Sie ggf., warum diese nicht existieren.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)^5}{x^3(1 - e^{x/2})^7}$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1 - \cos x)^5}{x^3(1 - e^{x/2})^7}$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 \sin x - 1}{1 + 7x^3}$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^6 - 2x^3} - \sqrt{x^6 + 3x^3} \right)$

e) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\pi^2 - 4x^2}{\cos x}$

Aufgabe 4

(4+4+4+4 = 16 Punkte)

Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie (d.h. das Ergebnis soll kein Summenzeichen mehr enthalten):

a) $\sum_{\nu=1}^{2017} (-1)^\nu$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!}$

c) $\sum_{\mu=0}^9 \sum_{\nu=\mu}^9 \binom{\nu}{\mu}$

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^n \frac{(-1)^\nu x^\nu y^{n-\nu}}{\nu!(n-\nu)!}$

*Schreiben Sie Ihr Ergebnis als *einen* Bruch.

Aufgabe 5

(4+4+4 = 12 Punkte)

Bestimmen Sie die Taylorreihen von

- a) $\frac{1}{27-x^3}$ und b) $\frac{x}{(1-x)(x+1)}$ um Null, sowie die Taylorreihe von
- c) $\sin x$ um $x_0 = \pi$, und geben Sie an, wo die Reihen konvergieren.

Aufgabe 6

(1+3+2+2+4+3+4 = 19 Punkte)

Wir untersuchen die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3|x| + 4}{2x + |x|}.$$

- a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist $f(x)$ definiert?
- b) Bestimmen Sie alle Asymptoten von f .
- c) Berechnen Sie alle Nullstellen.
- d) Berechnen Sie $f'(x)$.
- e) Bestimmen Sie alle Hoch- und Tiefpunkte.
- f) Zeichnen Sie den Graph der Funktion.
- g) Geben Sie möglichst große Intervalle $A, B \subseteq \mathbb{R}$ mit $-1 \in A$ an, so dass $f : A \rightarrow B$ bijektiv ist. Sei $f^{-1} : B \rightarrow A$ die Umkehrfunktion von f . Bestimmen Sie $f^{-1'}(0)$.

Aufgabe 7

(2+4 = 6 Punkte)

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$.

- a) Berechnen Sie A^2 und A^3 .
- b) Bestimmen Sie alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$, die $A\vec{x} = \vec{b}$ erfüllen.

Aufgabe 8

(4+2+6 = 12 Punkte)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & \alpha \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \alpha & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -\alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

- a) Berechnen Sie $\det A$.
- b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ besitzt A eine Inverse?
- c) Sei nun $\alpha = -1$. Berechnen Sie A^{-1} .

Aufgabe 9

(6 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ mit $A \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $A \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Klausur am 15.02.2017

Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift. Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite. Zusätzliches Papier ist jederzeit verfügbar. **Zeigen Sie auch stets Ihren Rechenweg und vereinfachen Sie Ihre Ergebnisse so weit wie möglich!**

Es sind maximal 105 Punkte erreichbar, 84 Punkte $\hat{=}$ 100% ($\hat{=}$ Note 1,0), 50% $\hat{=}$ 42 Punkte sind hinreichend zum Bestehen ($\hat{=}$ Note 4,0).

Erlaubtes Hilfsmittel: Ein handbeschriebenes Blatt (DIN A4).

Bearbeitungszeit: 120 Minuten.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1

(2+5 = 7 Punkte)

Seien $a_1 = a_2 = 1$ und $a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad \forall n \geq 2$.

- a) Bestimmen Sie a_3, a_4, a_5 und a_6 .
- b) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion:

$$\sum_{\nu=1}^n (a_\nu)^2 = a_n a_{n+1} \quad \forall n \geq 1.$$

Aufgabe 2

(4+4+4 = 12 Punkte)

Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen.

a)* $f(x) = \log \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)$

b) $g(x) = x \cdot 7^x$

c) $h(x) = \int_0^{x^3} \frac{dt}{1+t^2}$

Aufgabe 3

(3+3+3+3+3 = 15 Punkte)

Bestimmen Sie, falls existent, die folgenden Grenzwerte, oder begründen Sie ggf., warum diese nicht existieren.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)^5}{x^3(1 - e^{x/2})^7}$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1 - \cos x)^5}{x^3(1 - e^{x/2})^7}$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 \sin x - 1}{1 + 7x^3}$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^6 - 2x^3} - \sqrt{x^6 + 3x^3} \right)$

e) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\pi^2 - 4x^2}{\cos x}$

Aufgabe 4

(4+4+4+4 = 16 Punkte)

Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie (d.h. das Ergebnis soll kein Summenzeichen mehr enthalten):

a) $\sum_{\nu=1}^{2017} (-1)^\nu$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!}$

c) $\sum_{\mu=0}^9 \sum_{\nu=\mu}^9 \binom{\nu}{\mu}$

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^n \frac{(-1)^\nu x^\nu y^{n-\nu}}{\nu!(n-\nu)!}$

*Schreiben Sie Ihr Ergebnis als *einen* Bruch.

Aufgabe 5

(4+4+4 = 12 Punkte)

Bestimmen Sie die Taylorreihen von

- a) $\frac{1}{27-x^3}$ und b) $\frac{x}{(1-x)(x+1)}$ um Null, sowie die Taylorreihe von
- c) $\sin x$ um $x_0 = \pi$, und geben Sie an, wo die Reihen konvergieren.

Aufgabe 6

(1+3+2+2+4+3+4 = 19 Punkte)

Wir untersuchen die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3|x| + 4}{2x + |x|}.$$

- a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist $f(x)$ definiert?
- b) Bestimmen Sie alle Asymptoten von f .
- c) Berechnen Sie alle Nullstellen.
- d) Berechnen Sie $f'(x)$.
- e) Bestimmen Sie alle Hoch- und Tiefpunkte.
- f) Zeichnen Sie den Graph der Funktion.
- g) Geben Sie möglichst große Intervalle $A, B \subseteq \mathbb{R}$ mit $-1 \in A$ an, so dass $f : A \rightarrow B$ bijektiv ist. Sei $f^{-1} : B \rightarrow A$ die Umkehrfunktion von f . Bestimmen Sie $f^{-1'}(0)$.

Aufgabe 7

(2+4 = 6 Punkte)

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$.

- a) Berechnen Sie A^2 und A^3 .
- b) Bestimmen Sie alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$, die $A\vec{x} = \vec{b}$ erfüllen.

Aufgabe 8

(4+2+6 = 12 Punkte)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & \alpha \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \alpha & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -\alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

- a) Berechnen Sie $\det A$.
- b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ besitzt A eine Inverse?
- c) Sei nun $\alpha = -1$. Berechnen Sie A^{-1} .

Aufgabe 9

(6 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ mit $A \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $A \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Klausur am 15.02.2017

Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift. Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite. Zusätzliches Papier ist jederzeit verfügbar. **Zeigen Sie auch stets Ihren Rechenweg und vereinfachen Sie Ihre Ergebnisse so weit wie möglich!**

Es sind maximal 105 Punkte erreichbar, 84 Punkte $\hat{=}$ 100% ($\hat{=}$ Note 1,0), 50% $\hat{=}$ 42 Punkte sind hinreichend zum Bestehen ($\hat{=}$ Note 4,0).

Erlaubtes Hilfsmittel: Ein handbeschriebenes Blatt (DIN A4).

Bearbeitungszeit: 120 Minuten.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1

(2+5 = 7 Punkte)

Seien $a_1 = a_2 = 1$ und $a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad \forall n \geq 2$.

- a) Bestimmen Sie a_3 , a_4 , a_5 und a_6 .
- b) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion:

$$\sum_{\nu=1}^n (a_\nu)^2 = a_n a_{n+1} \quad \forall n \geq 1.$$

Aufgabe 2

(4+4+4 = 12 Punkte)

Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen.

a)* $f(x) = \log \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)$

b) $g(x) = x \cdot 7^x$

c) $h(x) = \int_0^{x^3} \frac{dt}{1+t^2}$

Aufgabe 3

(3+3+3+3+3 = 15 Punkte)

Bestimmen Sie, falls existent, die folgenden Grenzwerte, oder begründen Sie ggf., warum diese nicht existieren.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)^5}{x^3(1 - e^{x/2})^7}$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1 - \cos x)^5}{x^3(1 - e^{x/2})^7}$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 \sin x - 1}{1 + 7x^3}$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^6 - 2x^3} - \sqrt{x^6 + 3x^3} \right)$

e) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\pi^2 - 4x^2}{\cos x}$

Aufgabe 4

(4+4+4+4 = 16 Punkte)

Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie (d.h. das Ergebnis soll kein Summenzeichen mehr enthalten):

a) $\sum_{\nu=1}^{2017} (-1)^\nu$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!}$

c) $\sum_{\mu=0}^9 \sum_{\nu=\mu}^9 \binom{\nu}{\mu}$

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^n \frac{(-1)^\nu x^\nu y^{n-\nu}}{\nu!(n-\nu)!}$

*Schreiben Sie Ihr Ergebnis als *einen* Bruch.

Aufgabe 5

(4+4+4 = 12 Punkte)

Bestimmen Sie die Taylorreihen von

- a) $\frac{1}{27-x^3}$ und b) $\frac{x}{(1-x)(x+1)}$ um Null, sowie die Taylorreihe von
- c) $\sin x$ um $x_0 = \pi$, und geben Sie an, wo die Reihen konvergieren.

Aufgabe 6

(1+3+2+2+4+3+4 = 19 Punkte)

Wir untersuchen die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3|x| + 4}{2x + |x|}.$$

- a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist $f(x)$ definiert?
- b) Bestimmen Sie alle Asymptoten von f .
- c) Berechnen Sie alle Nullstellen.
- d) Berechnen Sie $f'(x)$.
- e) Bestimmen Sie alle Hoch- und Tiefpunkte.
- f) Zeichnen Sie den Graph der Funktion.
- g) Geben Sie möglichst große Intervalle $A, B \subseteq \mathbb{R}$ mit $-1 \in A$ an, so dass $f : A \rightarrow B$ bijektiv ist. Sei $f^{-1} : B \rightarrow A$ die Umkehrfunktion von f . Bestimmen Sie $f^{-1'}(0)$.

Aufgabe 7

(2+4 = 6 Punkte)

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$.

- a) Berechnen Sie A^2 und A^3 .
- b) Bestimmen Sie alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$, die $A\vec{x} = \vec{b}$ erfüllen.

Aufgabe 8

(4+2+6 = 12 Punkte)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & \alpha \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \alpha & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -\alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

- a) Berechnen Sie $\det A$.
- b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ besitzt A eine Inverse?
- c) Sei nun $\alpha = -1$. Berechnen Sie A^{-1} .

Aufgabe 9

(6 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ mit $A \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $A \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.