Universität Tübingen, Mathematisches Institut — Wintersemester 16/17
Dr. Stefan Keppeler

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Nachklausur am 05.04.2017

Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift. Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite. Zusätzliches Papier ist jederzeit verfügbar. Vereinfachen Sie Ihre Ergebnisse so weit wie möglich. **Zeigen Sie auch stets Ihren Rechenweg!**

Es sind maximal 110 Punkte erreichbar, 88 Punkte $\widehat{=}$ 100% ($\widehat{=}$ Note 1,0), 50% $\widehat{=}$ 44 Punkte sind hinreichend zum Bestehen ($\widehat{=}$ Note 4,0).

Erlaubtes Hilfsmittel: Ein handbeschriebenes Blatt (DIN A4).
Bearbeitungszeit: 120 Minuten. **Viel Erfolg!**

Aufgabe 1 (6+6 = 12 Punkte)
Seien $a_1 = 0$ und

$$a_{n+1} = n + \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad \forall\, n \geq 1\,.$$

a) Bestimmen Sie a_2, a_3 und a_4.
b) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion:

$$a_n = 2^{n-1} - 1 \qquad \forall\, n \geq 1\,.$$

Aufgabe 2 (4+4+4 = 12 Punkte)
Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen.

a)* $f(x) = \log\left(\dfrac{1+x^2}{1-x^2}\right)$ b) $g(x) = x^2 \cdot 2^x$ c) $h(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} (2t^3 + t)\,\mathrm{d}t$

Aufgabe 3 (3+3+3+3+3 = 15 Punkte)
Bestimmen Sie, falls existent, die folgenden Grenzwerte, oder begründen Sie ggf., warum diese nicht existieren.

a) $\displaystyle\lim_{x\to -3} \frac{x^3+27}{x+3}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x - x\cos x}{7x^5 - x^3}$ c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - x\cos x}{7x^5 - x^3}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right)$ e) $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2} \frac{\cos x}{4x^2 - \pi^2}$

Aufgabe 4 (4+4+4+4 = 16 Punkte)
Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie (d.h. das Ergebnis soll kein Summenzeichen mehr enthalten):

a) $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{2017} (-1)^\nu$ b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(n-2)!}$ c) $\displaystyle\sum_{\mu=0}^{9} \sum_{\nu=\mu}^{9} \binom{\nu}{\mu} 2^\mu$ d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k b^k a^{n-k}}{k!(n-k)!}$

---

*Schreiben Sie Ihr Ergebnis als *einen* Bruch.

Aufgabe 5 (4+4+4 = 12 Punkte)

Bestimmen Sie die Taylorreihen von

a) $\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$ und b) $\dfrac{x}{x^3-8}$ um Null, sowie die Taylorreihe von

c) $\cos x$ um $x_0 = \frac{\pi}{2}$, und geben Sie an, wo die Reihen konvergieren.

Aufgabe 6 (6 Punkte)

Für welche $a \in \mathbb{R}$ hat die Funktion $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_a(x) = \frac{\cos x}{1+x^4}\, \mathrm{e}^{ax^2}$$

bei $x = 0$ ein Minimum, für welche ein Maximum?

Aufgabe 7 (1+3+1+4+4 = 13 Punkte)

Wir untersuchen die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 + x|x-1| + x}{2|x-1|}\,.$$

a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist $f(x)$ definiert?
b) Bestimmen Sie alle Asymptoten von f.
c) Berechnen Sie alle Nullstellen.
d) Bestimmen Sie alle Hoch- und Tiefpunkte.
e) Zeichnen Sie den Graph der Funktion.

Aufgabe 8 (4+2+2+4+2+4 = 18 Punkte)

Sei $A = (\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie A^2 und A^3.
b) Berechnen Sie $\det A$.
c) Sind die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ linear abhängig oder linear unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort in einem Satz.
d) Bestimmen Sie alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, die $A\vec{x} = \vec{b}$ erfüllen.
e) Sind die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{b}$ linear abhängig oder linear unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort in einem Satz.
f) Auf $\mathbb{R}^3$ ist durch

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3$$

ein Skalarprodukt definiert. Bestimmen Sie, bezüglich dieses Skalarprodukts, eine Orthonormalbasis von $\operatorname{span}(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{b})$.

Aufgabe 9 (6 Punkte)

Seien $A, B \in \mathbb{R}^{5\times 5}$, sei $B^TB = I$ und sei $\det(B^TAB) = 2017$. Ist A invertierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.