Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Wintersemester 17/18

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 5 (Abgabe am 17.11.2017)

Aufgabe 26 (9 Punkte)

Bestimmen Sie alle Asymptoten der folgenden Funktionen!

a) $f(x) = \dfrac{4x^3 - 2x^2 + x}{3x^3 - 2x}$ b) $f(x) = \dfrac{1 - x^3}{x^2 + x - 2}$ c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{4x^2 + 1}}{x - 2}$

Aufgabe 27 (16 Punkte)

Wo sind die folgenden Funktionen differenzierbar? Bestimmen Sie ggf. die Ableitung.

a) $f(x) = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$ b) $f(x) = |x^2 - 17|$ c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$ d) $f(x) = x|x|$

Aufgabe 28 (9 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

a) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{2x+6}{27+x^3}$ b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{512 - x^9}{x^2 - 4}$ c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^n - 1}{1 - x}$ für $n \in \mathbb{N}_0$

Aufgabe 29 (keine Abgabe)

Sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Wir betrachten im Folgenden stets die Asymptotik für $x \to x_0$. Sei weiter $f(x) = o\big((x-x_0)^n\big)$ und $g(x) = o\big((x-x_0)^m\big)$ mit $n, m \in \mathbb{N}_0$.

a) Zeigen Sie:[1]

$$f(x)\, g(x) = o\big((x-x_0)^{n+m}\big)\,.$$

Dafür schreiben wir kurz $o\big((x-x_0)^n\big)\, o\big((x-x_0)^m\big) = o\big((x-x_0)^{n+m}\big)$.

b) Zeigen Sie[2]

$$f(x) + g(x) \;=\; o\big((x-x_0)^{\min(n,m)}\big)\,.$$

Dafür schreiben wir kurz $o\big((x-x_0)^n\big) \;+\; o\big((x-x_0)^m\big) \;=\; o\big((x-x_0)^{\min(n,m)}\big)$.

Aufgabe 30 (5 Punkte)

Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbare Funktionen. Beweisen Sie die Produktregel,

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)\,,$$

unter Verwendung der Charakterisierung der Ableitung mit Hilfe von Klein-o (Lemma 4).

---

[1] Denken Sie daran, wie wir in der Vorlesung gezeigt haben, dass $x^m\, o(x^n) = o(x^{n+m})$, $x \to 0$, was die Kurzschreibweise der folgenden Äquivalenz ist,

$$f(x) = o(x^n) \quad \Leftrightarrow \quad x^m\, f(x) = o(x^{n+m})\,,\ x \to 0\,.$$

[2] Dabei ist $\min(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ die kleinste der Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_N$, d.h. z.B. ist $\min(2,0,1,3) = 0$.

Aufgabe 31 (12 Zusatzpunkte)

Üben Sie bis spätestens 10.12.17 auf `www.khanacademy.org` die *Skills*

- *Divide polynomials with remainders*,
- *Derivative & the direction of a function*,
- *Visualizing derivatives*,
- *Polynomial functions differentiation*,
- *Tangents of polynomials* und
- *Basic differentiation rules*.

Hinweise: Siehe Aufgabe 12 (Blatt 2).