Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Wintersemester 17/18

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 6 (Abgabe am 24.11.2017)

Aufgabe 32 (9 Punkte)
Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{n+17}\right)^n$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{2n+1}\right)^{n-1}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{2-n}\right)^{2n}$

Aufgabe 33 (6 Punkte)

a) Zeigen Sie (mit vollständiger Induktion):

$$\mathrm{e}^{1-n} < \frac{n!}{n^n} \quad \forall\, n \geq 2\,.$$

Hinweis: Aus der Vorlesung wissen wir dass $(1+\frac{1}{n})^n < \mathrm{e}\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

b) Schätzen Sie $n!$ mithilfe von (a) nach unten ab, und vergleichen Sie mit der Stirlingschen Formel.

Aufgabe 34 (10 Punkte)
Die Hyperbelfunktionen *Sinus Hyperbolicus*, *Kosinus Hyperbolicus* und *Tangens Hyperbolicus* sind definiert durch

$$\sinh(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}\,, \quad \cosh(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \quad \text{und} \quad \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}\,.$$

a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ sind die Funktionen definiert?
b) Bestimmen Sie jeweils den Limes für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$.
c) Zeigen Sie: $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$.

Aufgabe 35 (10 Punkte)
Berechnen Sie jeweils die Ableitung von

a) $\sinh x$, b) $\cosh x$ und c) $\tanh x$

Drücken Sie dabei die Ergebnisse in möglichst einfacher Form wieder mit Hilfe dieser drei hyperbolischen Funktionen aus. Skizzieren Sie nun die Graphen von $\sinh, \cosh$ und $\tanh$. Auf welchen Teil-Intervallen ihres jeweiligen Definitionsbereichs sind die drei Funktionen streng monoton wachsend oder fallend? Geben Sie größtmögliche Intervalle an, auf denen die drei Funktionen injektiv sind, und schränken Sie die Wertebereiche so ein, dass die Funktionen dort auch surjektiv (und damit bijektiv) sind.

Aufgabe 36 (keine Abgabe)

Die Umkehrfunktion des *Sinus Hyperbolicus* heißt *Area Sinus Hyperbolicus*, Funktionsname Arsinh, d.h. $\operatorname{Arsinh}(\sinh(x)) = x$, analog für die anderen hyperbolischen Funktionen. Geben Sie die maximalen Definitions- und Wertebereiche für

a) $\operatorname{Arsinh} x$, b) $\operatorname{Arcosh} x$ und c) $\operatorname{Artanh} x$

an. Bei (a) und (c) ist dies eindeutig – bei (b) sind zwei Zweige anzugeben, analog zum Vorlesungsbeispiel $f(x) = x^2$ mit Umkehrfunktionen von $\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ und von $\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^-$.

Aufgabe 37 (8 Zusatzpunkte)

Üben Sie bis spätestens 14.01.18 auf `www.khanacademy.org` die *Skills*

- *Evaluate inverse functions*,
- *Find inverse functions*,
- *Use the properties of logarithms* und
- *Properties of exponents (rational exponents)*.

Hinweise: Siehe Aufgabe 12 (Blatt 2).