Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 8 (Abgabe am 08.12.2017)

Aufgabe 44

(16 Punkte)

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{\nu=0}^{\infty} x^{\nu} \quad \forall |x| < 1.$$

Bestimmen Sie *damit* die Taylorreihen der folgenden Funktionen um Null, und geben Sie an, wo diese konvergieren.

a) $\frac{1}{1-2x}$ b) $\frac{1}{17+x}$ c) $\frac{1}{1+x^3}$ d) $\frac{1-x}{1+x}$

HINWEIS: Sie müssen (und sollen) keine Ableitungen berechnen.

Aufgabe 45

(keine Abgabe)

Bestimmen Sie die Taylorreihen von

a) $\sinh x$ b) $\cosh x$ c) $\operatorname{Artanh} x$

um $x_0 = 0$. Wo konvergieren die Reihen gegen die jeweilige Funktion?

HINWEIS: Denken Sie bei (c) an die Herleitung der Taylorreihe von $\log$ in der Vorlesung.

Aufgabe 46

(12 Punkte)

Berechnen Sie die Taylorreihen der folgenden Funktionen (ggf. stetig fortgesetzt) um Null, und geben Sie an, wo diese konvergieren.

a) $\frac{1 - \cos x}{x}$ b) $\frac{1}{(1-x)(7-x)}$ c) $\frac{\cos x}{1-x^2}$

Aufgabe 47

(8 Punkte)

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte (mit Erklärung/Herleitung)!

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos(2x))^3}{(x - \sin x)^2}$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{2000} \sin^{17} x}{(e^{-x} - 1)^{2017}}$

Aufgabe 48

(keine Abgabe)

Skizzieren Sie die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \exp(-1/x^2)$, stetig fortgesetzt bei Null. Berechnen Sie die Taylorreihe von f um Null. Für welche x konvergiert die Reihe? Für welche x konvergiert die Reihe gegen $f(x)$?

Aufgabe 49

(8 Zusatzpunkte)

Üben Sie bis spätestens 14.01.18 auf www.khanacademy.org die *Skills*

- *Infinite geometric series.*
- *Function as a geometric series,*
- *Power series function representation* und
- *Maclaurin series for $\sin x$, $\cos x$, and e^x*

HINWEISE: (i) Siehe Aufgabe 12 (Blatt 2).

(ii) Die Taylor-Reihe um Null heißt auch Maclaurin-Reihe.