Universität Tübingen, Mathematisches Institut Wintersemester 17/18
Dr. Stefan Keppeler

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 9 (Abgabe am 15.12.2017)

Aufgabe 50 (12 Punkte)
Bestimmen Sie die Taylorreihen von

a) $\dfrac{1}{20+x}$ um $x_0 = 17$, b) e^{-x} um $x_0 = 7$ und e) $\cos x$ um $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

Wo konvergieren die Reihen gegen die jeweiligen Funktionen?

Aufgabe 51 (10 Punkte)
Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ hat die Funktion f_{ab} definiert durch

$$f_{ab}(x) \; = \; \frac{\sqrt{1+ax^4}}{1-bx^2}\,\mathrm{e}^{-x^2}$$

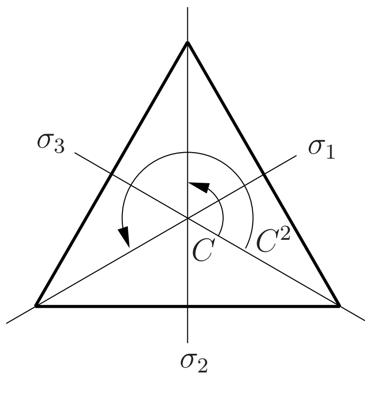
bei Null ein Maximum, für welche ein Minimum? Begründen Sie Ihre Antwort!
Hinweis: Berechnen Sie keine Ableitungen, verwenden Sie Taylorentwicklungen.

Aufgabe 52 (10 Punkte)
Diskutieren Sie die Funktion

$$f(x) = \frac{x|x| - 4 + 2x - x^2}{|x-1|}$$

für reelle x. Achten Sie dabei insbesondere auf den (maximalen) Definitionsbereich, stetige Fortsetzbarkeit, Asymptoten, Nullstellen sowie Hoch- und Tiefpunkte, und zeichnen Sie die den Graph der Funktion.

Aufgabe 53 (keine Abgabe)
Wir betrachten die Symmetriegruppe eines gleichseitigen Dreiecks. Bezeichnen Sie die Spiegelungen an den Seitenhalbierenden mit $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, die 120°-Drehung um den Mittelpunkt mit C und die 240°-Drehung um den Mittelpunkt mit C^2 (wieso?). Bestimmen Sie die Gruppentafel. Dokumentieren Sie, wie Sie zu Ihrem Ergebnis gekommen sind. Ist die Gruppe abelsch?



Hinweis: Gehen Sie analog zum Vorlesungsbeispiel vor, in dem wir die Symmetriegruppe eines Rechtecks diskutiert haben.

Aufgabe 54 (6 Punkte)

Wir betrachten $\mathbb{Z}_N := \{0, 1, \ldots, N-1\}$ mit der üblichen Addition und Multiplikation in $\mathbb{Z}$, aber modulo N, d.h. wir identifizieren N mit 0, $N+1$ mit 1 und so weiter. Zeigen Sie:

a) $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$ ist kein Körper.

b) Ist N keine Primzahl, so ist $(\mathbb{Z}_N, +, \cdot)$ kein Körper.

Aufgabe 55 (keine Abgabe)

Welche der folgenden Mengen M sind Vektorräume über K?[3]

a) $M = \mathbb{C}^3$, $K = \mathbb{R}$ b) $M = \mathbb{R}^3$, $K = \mathbb{C}$ c) $M = \mathbb{Q}$, $K = \mathbb{R}$,

d) $M = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_3 = 17x_1\,,\ x_1 + x_2 = x_3 \right\}$, $K = \mathbb{R}$

e) $M = \{$Polynome vom Grad ≤ 4 mit reellen Koeffizienten und Steigung 17 im Ursprung$\}$, $K = \mathbb{R}$

f) $M = \{$Polynome vom Grad ≤ 4 mit reellen Koeffizienten und einer Nullstelle bei 17$\}$, $K = \mathbb{R}$

[3] Überlegen Sie nur, ob aus $\vec{x}, \vec{y} \in M$ folgt, dass auch $\lambda\vec{x} + \mu\vec{y} \in M \ \forall\ \lambda, \mu \in K$. Die Rechenregeln bekommen wir geschenkt. (Warum?)