

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 10 (Abgabe am 22.12.2017)

Aufgabe 56¹

(8 Zusatzpunkte)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Vektoren aus $\mathbb{R}^3$ linear unabhängig sind, und stellen Sie – falls möglich – den Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ als Linearkombination dieser Vektoren dar.

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 19 \\ 3 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 57

(10 Punkte)

Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Vektoren des $\mathbb{R}^3$ linear abhängig?

a) $\begin{pmatrix} \alpha^2 \\ 1 \\ \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ \beta \end{pmatrix}.$

Aufgabe 58

(10 Punkte)

Die Menge aller stetigen Funktionen auf dem Intervall $[a, b]$, genannt $C([a, b])$, ist ein Vektorraum über den reellen Zahlen. Für $x \in [-\pi, \pi]$ sei $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = \sin x$, $f_3(x) = \cos x$ und $f_4(x) = \cos^2(\frac{x}{2})$. Zeigen Sie:

- a) f_1, f_3, f_4 sind linear abhängig in $C([-\pi, \pi])$.
- b) f_1, f_2, f_3 sind linear unabhängig in $C([-\pi, \pi])$.

HINWEIS: Nehmen Sie in Teil b an, die Funktionen seien linear abhängig und führen Sie dies zum Widerspruch!

Aufgabe 59

(8 Zusatzpunkte)

Üben Sie bis spätestens 14.01.18 auf www.khanacademy.org die *Skills*

- *Graphically add & subtract vectors,*
- *Combined vector operations,*
- *Number of solutions to a system of equations algebraically* und
- *Systems of equations word problems.*

HINWEISE: Siehe Aufgabe 12 (Blatt 2).

¹Diese Aufgabe wird nicht in den Übungsgruppen besprochen. Das Vergleichen von Ergebnissen und die Diskussion von Lösungswegen, z.B. im Webforum, ist aber erwünscht und wird unterstützt.

Aufgabe 60¹

(keine Abgabe)

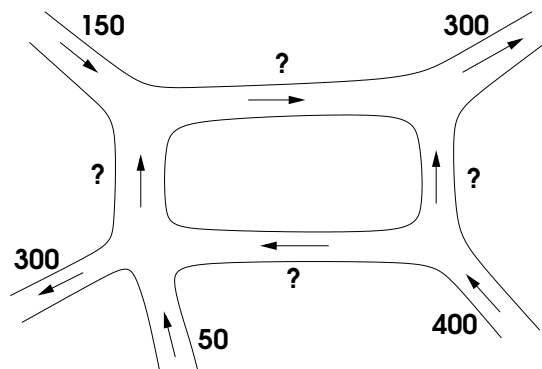
Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden linearen Gleichungssysteme:

a)	$x_1 + x_2 + x_3 = -1$	b)	$7x_1 + 2x_2 + 8x_3 = 0$	c)	$7x_1 + 2x_2 + 8x_3 = 17$
	$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1$		$x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 0$		$x_1 + 3x_2 - 7x_3 = -3$
	$x_1 + 4x_2 + 9x_3 = 5$		$3x_1 + 5x_2 - 9x_3 = 0$		$3x_1 + 5x_2 - 9x_3 = -1$

Aufgabe 61

(10 Punkte)

Rechts ist der Ausschnitt eines Stadtplans gezeigt, in dem nur Einbahnstraßen zu sehen sind. An jedem Straßenabschnitt wurde eingetragen, wieviele Autos dort während einer bestimmten Zeit entlang gefahren sind. Wir nehmen an, dass alle Autos ihre Fahrt außerhalb des Ausschnitts begonnen und beendet haben.



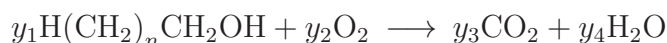
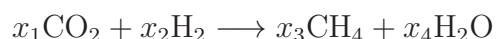
Was können Sie über die Anzahlen der Autos sagen, die die vier mit Fragezeichen markierten Straßen benutzten? Stellen Sie dazu ein lineares Gleichungssystem auf, bringen Sie dieses auf Zeilenstufenform und geben Sie die Lösungsmenge an. Geben Sie außerdem für jede der vier Straßen die größt- und die kleinstmögliche Zahl an Autos an.

HINWEIS: Zur besseren Vergleichbarkeit bezeichnen Sie bitte die Anzahl der Autos auf den vier Straßen im Uhrzeigersinn mit $x_1, \dots, x_4$ beginnend mit der unteren.

Aufgabe 62¹

(keine Abgabe)

Formulieren Sie für jede der chemischen Reaktionen



(für beliebiges $n \in \mathbb{N}_0$) ein lineares Gleichungssystem für die Werte x_i bzw. y_j aus der Bedingung, dass auf beiden Seiten des Reaktionspfeils dieselbe Anzahl von H-, C- und O-Atomen stehen. Bestimmen Sie die jeweilige Lösungsmenge und darin die Teilmenge derjenigen Lösungen, bei denen alle x_i bzw. y_j positive ganze Zahlen sind.

Aufgabe 63

(9 Punkte)

Geben Sie für alle Vektorräume aus Aufgabe 55 die Dimension und eine Basis an.

¹Diese Aufgabe wird nicht in den Übungsgruppen besprochen. Das Vergleichen von Ergebnissen und die Diskussion von Lösungswegen, z.B. im Webforum, ist aber erwünscht und wird unterstützt.