Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Wintersemester 17/18

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 12 (Abgabe am 19.01.2018)

Aufgabe 70 (8 Punkte)
Bestimmen Sie mithilfe des Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens eine ON-Basis des $\mathbb{R}^2$ bezüglich des Skalarprodukts aus Aufgabe 65d. Beginnen Sie mit den l.u. Vektoren

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 71 (8 Punkte)
Bestimmen Sie die Polardarstellung der folgenden Punkte (x, y) aus $\mathbb{R}^2$:

a) $(1, \sqrt{3})$ b) $(1, -1)$ c) $(-\sqrt{3}, 1)$ d) $(-2, -2)$

Geben Sie die folgenden Punkte (x, y, z) aus $\mathbb{R}^3$ in Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ) an:

e) $(-1, 0, 0)$ f) $(0, \pi, 0)$ g) $(\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})$ h) $(1, 1, \sqrt{2})$

Aufgabe 72 (10 Punkte)
Sei $t \in [0, 2\pi]$. Berechnen Sie für die folgenden Kurven die Geschwindigkeit $\dot{\vec{x}}(t)$ und zeichnen Sie die Kurven.

a) $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} (4\pi - t)\cos t \\ (4\pi - t)\sin t \end{pmatrix}$ b) $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ \sin(2t) \\ t \end{pmatrix}$

Aufgabe 73 (keine Abgabe)
Zeigen Sie: Die Einheitsvektoren für Kugelkoordinaten,

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi \\ -\sin\theta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix},$$

bilden (an jedem Punkt) (a) eine ONB des $\mathbb{R}^3$ und (b) ein Rechtssystem (in der angegebenen Reihenfolge). Berechnen Sie außerdem (c) die Geschwindigkeit in Kugelkoordinaten, d.h. berechnen Sie $\dot{\vec{x}}$ für

$$\vec{x}(t) = r(t) \begin{pmatrix} \sin(\theta(t))\,\cos(\phi(t)) \\ \sin(\theta(t))\,\sin(\phi(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{pmatrix},$$

und drücken Sie das Ergebnis als Linearkombination von $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ und $\vec{e}_\phi$ aus.

Aufgabe 74 [1] (10 Zusatzpunkte)

Die Lösungsmenge des folgenden LGS ist eine Ebene E_1 im $\mathbb{R}^3$,

$$2x_1 + 1 + 8x_3 = x_2\,.$$

a) Geben Sie eine Parameterdarstellung sowie die Hessesche Normalform von E_1 an. Welchen Abstand hat die Ebene vom Ursprung?

Die Ebene E_2 im $\mathbb{R}^3$ ist gegeben als

$$E_2 = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\quad s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

b) Geben Sie die Hessesche Normalform von E_2 an.
c) Bestimmen Sie die Schnittmenge von E_2 und E_1.

Aufgabe 75 [1] (10 Punkte)

Berechnen Sie – falls möglich – für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

a) AA^T, b) A^TA, c) AA^TB, d) A^TAB,
e) B^TAA^T, f) A^2, g) A^TAA^TA.

Hinweis: Assoziativität ist hilfreich.

Aufgabe 76 (6 Zusatzpunkte)

Üben Sie bis spätestens 04.02.18 auf `www.khanacademy.org` die *Skills*

- *Matrix elements*
- *Matrix equations: scalar multiplication*
- *Multiply matrices*

Hinweis: Siehe Aufgabe 12 (Blatt 2).

[1] Diese Aufgabe wird nicht in den Übungsgruppen besprochen. Das Vergleichen von Ergebnissen und die Diskussion von Lösungswegen, z.B. im Webforum, ist aber erwünscht und wird unterstützt.