

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 13 (Abgabe am 26.01.2018)

Aufgabe 77

(4+4+3+4=15 Punkte)

Seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Berechnen Sie $\det A$.
- Berechnen Sie B^{-1} und $\det B$.
- Bestimmen Sie $\det C$, $\det(C^{-1})$ und $\det(C^5)$.
- Berechnen Sie mithilfe von B^{-1} die Lösungen \vec{x} und X von

$$B\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad BX = C.$$

Wie hätten Sie \vec{x} oder X berechnen können, ohne zunächst B^{-1} zu bestimmen?

Aufgabe 78

(10 Zusatzpunkte)

Wir definieren die Potenz A^n einer quadratischen Matrix A durch

$$A^0 = I \text{ und } A^{n+1} = AA^n,$$

$$\text{d.h. } A^0 = I, \quad A^1 = A, \quad A^2 = AA, \quad A^3 = AAA, \dots$$

Weiter definieren wir e^{Ax} für $x \in \mathbb{R}$ durch die bekannte Taylorreihe der e-Funktion, d.h. $e^{Ax} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} A^n$. Berechnen Sie e^{Ax} für $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

HINWEISE: (i) Berechnen Sie zunächst A^2 , A^3 und A^4 . Folgern Sie daraus, wie A^n aussieht.
(ii) Aus der Definition der Matrixaddition (komponentenweise) folgt

$$\sum_n \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_n a_n & \sum_n b_n \\ \sum_n c_n & \sum_n d_n \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 79

(10 Punkte)

Seien $\alpha, b \in \mathbb{R}$ mit $b \neq 0$, und sei $A(b, \alpha) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ definiert durch

$$A(b, \alpha) = b \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

- a) Berechnen Sie $A(b_1, \alpha_1) \cdot A(b_2, \alpha_2)$.
b) Bestimmen Sie $B_n := (A(b, \alpha))^n$, $\det(B_n)$ sowie $(B_n)^{-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 80

(8 Punkte)

Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen (wobei $x, y \in \mathbb{R}$).

- a) $\frac{40i + 10}{3 - 5i}$ b) $\exp\left(\frac{1}{2} \log 2 - i\frac{\pi}{4}\right)$ c) $(iy - x)^3$ d) $\cos(x + iy)$

Aufgabe 81

(6 Zusatzpunkte)

Üben Sie bis spätestens 04.02.18 auf www.khanacademy.org die *Skills*

- *Inverse of a 3×3 matrix*,
- *Determinant of a 3×3 matrix* und
- *Represent linear systems with matrix equations*.

HINWEIS: Siehe Aufgabe 12 (Blatt 2).