Universität Tübingen, Mathematisches Institut — Wintersemester 17/18
Dr. Stefan Keppeler

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Klausur am 14.02.2018

Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift. Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite. Zusätzliches Papier ist jederzeit verfügbar. **Zeigen Sie auch stets Ihren Rechenweg und vereinfachen Sie Ihre Ergebnisse so weit wie möglich!**

Es sind maximal 108 Punkte erreichbar, 86 Punkte $\widehat{=}$ 100% ($\widehat{=}$ Note 1,0), 50% $\widehat{=}$ 43 Punkte sind hinreichend zum Bestehen ($\widehat{=}$ Note 4,0).

Erlaubtes Hilfsmittel: Ein handbeschriebenes Blatt (DIN A4).
Bearbeitungszeit: 120 Minuten. **Viel Erfolg!**

Aufgabe 1 (3+4 = 7 Punkte)

Sei $a_1 = 2$ und $a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n}\ \forall\, n \geq 1$.

a) Bestimmen Sie a_2, a_3 und a_4.

b) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion:

$$a_n = \frac{n+1}{n} \quad \forall\, n \geq 1\,.$$

Aufgabe 2 (4+4=8 Punkte)

Sei $g(x) = x^n \log x - \frac{x^n}{n}$.

a) Berechnen Sie $g'(x)$.

b) Bestimmen Sie $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x^2 \log x \,\mathrm{d}x\,.$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $f(x) = \displaystyle\int_{2x}^{x^2} \sin(t^2)\,\mathrm{d}t$. Berechnen Sie $f'(x)$.

Aufgabe 4 (3+3+3+3+3 = 15 Punkte)

Bestimmen Sie, falls existent, die folgenden Grenzwerte, oder begründen Sie ggf., warum diese nicht existieren.

a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\cos(x^2) - \cos(2x^2)}{x^4}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x^2) - \cos(2x^2)}{x^4}$ c) $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2} \frac{\sin(2x)}{4x^2 - \pi^2}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^8 - x^3} - \sqrt{x^8 + x^4}\right)$ e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)^5}{x^7 \sin^3(x)}$

Aufgabe 5 (4+4+4+4 = 16 Punkte)

Sei $x \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie (d.h. das Ergebnis soll kein Summenzeichen mehr enthalten):

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{2018} 2^n$ b) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} 2^{2-n}$ c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ d) $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{18} \sum_{\mu=\nu}^{18} \binom{\mu}{\nu}$

Aufgabe 6 (4+4+4 = 12 Punkte)

Bestimmen Sie die Taylorreihen von

a) $\dfrac{1}{\pi^3 - x^3}$ und b) $\dfrac{1}{(1-x)(1-3x)}$ um Null, sowie die Taylorreihe von

c) $\dfrac{1}{x^2 - x - \frac{3}{4}}$ um $x_0 = \frac{1}{2}$, und geben Sie an, wo die Reihen konvergieren.

Aufgabe 7 (1+3+2+2+3+3+4 = 18 Punkte)

Wir untersuchen die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 + |x|(x-2) + 2}{|x|}.$$

a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist $f(x)$ definiert?
b) Bestimmen Sie alle Asymptoten von f.
c) Berechnen Sie alle Nullstellen.
d) Berechnen Sie $f'(x)$.
e) Bestimmen Sie alle Hoch- und Tiefpunkte.
f) Zeichnen Sie den Graph der Funktion.
g) Geben Sie möglichst große Intervalle $A, B \subseteq \mathbb{R}$ mit $0 \in B$ an, so dass $f : A \to B$ bijektiv ist. Sei $f^{-1} : B \to A$ die Umkehrfunktion von f. Bestimmen Sie ${f^{-1}}'(0)$.

Aufgabe 8 (4+2+2+4+2+4 = 18 Punkte)

Sei $A = (\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie A^2 und A^3.
b) Bestimmen Sie $\det A$.
c) Sind die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ linear abhängig oder linear unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort in einem Satz.
d) Bestimmen Sie alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, die $A\vec{x} = \vec{b}$ erfüllen.
e) Sind die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_3, \vec{b}$ linear abhängig oder linear unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort in einem Satz.
f) Auf $\mathbb{R}^3$ ist durch

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right\rangle = 3x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3$$

ein Skalarprodukt definiert. Bestimmen Sie, bezüglich dieses Skalarprodukts, eine Orthonormalbasis von $\operatorname{span}(\vec{a}_1, \vec{a}_3, \vec{b})$.

Aufgabe 9 (10 Punkte)

Sei $\varphi \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

$$\sum_{\nu=0}^{n} \binom{2n}{2\nu} (-1)^\nu \sin^{2\nu}(\varphi) \cos^{2n-2\nu}(\varphi) = \cos(2n\varphi) .$$