Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Wintersemester 17/18

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Nachklausur am 17.04.2018

Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift. Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite. Zusätzliches Papier ist jederzeit verfügbar. Vereinfachen Sie Ihre Ergebnisse so weit wie möglich. **Zeigen Sie auch stets Ihren Rechenweg!**

Es sind maximal 107 Punkte erreichbar, 84 Punkte $\widehat{=}$ 100% ($\widehat{=}$ Note 1,0), 50% $\widehat{=}$ 42 Punkte sind hinreichend zum Bestehen ($\widehat{=}$ Note 4,0).

Erlaubtes Hilfsmittel: Ein handbeschriebenes Blatt (DIN A4).
Bearbeitungszeit: 120 Minuten. **Viel Erfolg!**

Aufgabe 1 (5+5=10 Punkte)
Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$a_n = \sum_{\nu=1}^{n} \log\left(1 + \frac{1}{\nu}\right).$$

a) Bestimmen Sie a_1, a_2 und a_3. (Rechenweg!)
b) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion:

$$a_n = \log(n+1) \quad \forall\, n \geq 1\,.$$

Aufgabe 2 (2+4=6 Punkte)
Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $x \in \mathbb{R}^+$ sei $g(x) = (\log x)^n$

a) Berechnen Sie $g'(x)$.
b) Bestimmen Sie $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{(\log x)^7}{x}\, \mathrm{d}x$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Sei $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^3} \cos(t^2)\, \mathrm{d}t$. Berechnen Sie $f'(x)$.

Aufgabe 4 (3+3+3+3+3 = 15 Punkte)
Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{x^2} - \mathrm{e}^{-x^2}}{\mathrm{e}^{2x^2} - \mathrm{e}^{-2x^2}}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{x\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}$ c) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{x\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \left(\sqrt{x^6 - x^3} - \sqrt{x^6 + x^2}\right)$ e) $\displaystyle\lim_{x\to \pi/2} \frac{1 - \sin x}{4x^2 - \pi^2}$

Aufgabe 5 (4+4+4 = 12 Punkte)
Berechnen Sie (d.h. das Ergebnis soll kein Summenzeichen mehr enthalten):

a) $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{2018} (-1)^{\nu}$ b) $\displaystyle\sum_{n=8}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$ c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k\, 3^{n-k}}{k!(n-k)!}$

Aufgabe 6 (4+4+4 = 12 Punkte)

Bestimmen Sie die Taylorreihen von

a) $\dfrac{x}{3-x^2}$ und b) $\dfrac{1}{(x-3)(x-1)}$ um Null, sowie die Taylorreihe von

c) $\dfrac{1}{x^2-2\pi x}$ um $x_0=\pi$, und geben Sie an, wo die Reihen konvergieren.

Aufgabe 7 (1+3+2+2+3+3+4 = 18 Punkte)

Wir untersuchen die Funktion

$$f(x)=\frac{x^2-|x|(x+2)+2}{|x|}.$$

a) Für welche $x\in\mathbb{R}$ ist $f(x)$ definiert?
b) Bestimmen Sie alle Asymptoten von f.
c) Berechnen Sie alle Nullstellen.
d) Berechnen Sie $f'(x)$.
e) Bestimmen Sie alle Hoch- und Tiefpunkte.
f) Zeichnen Sie den Graph der Funktion.
g) Geben Sie möglichst große Intervalle $A,B\subseteq\mathbb{R}$ mit $0\in B$ an, so dass $f:A\to B$ bijektiv ist. Sei $f^{-1}:B\to A$ die Umkehrfunktion von f. Bestimmen Sie ${f^{-1}}'(0)$.

Aufgabe 8 (2+4+3+3+4 = 16 Punkte)

Sei $A=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}$ und $B=\begin{pmatrix}1&-1\\-2&2\\3&-3\\-4&4\end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie $\det A$.
b) Berechnen Sie A^2 und A^4.
c) Bestimmen Sie A^{-1}.
d) Bestimmen Sie alle X, die $AX=B$ erfüllen.
e) Für $x\in\mathbb{R}$ definieren wir e^{A^2x} durch die Taylorreihe der Exponentialfunktion, d.h. $\mathrm{e}^{A^2x}:=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}A^{2n}$. Berechnen Sie e^{A^2x}.

Aufgabe 9 (2+6 = 8 Punkte)

Seien $\vec{a}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{a}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{a}_3=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$.

a) Sind die Vektoren $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ linear abhängig oder linear unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort in einem Satz.
b) Auf $\mathbb{R}^3$ ist durch $\left\langle\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}\right\rangle=x_1y_1+3x_2y_2+x_3y_3+x_2y_3+x_3y_2$ ein Skalarprodukt definiert. Bestimmen Sie, bezüglich dieses Skalarprodukts, eine Orthonormalbasis von $\operatorname{span}(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3)$.

Aufgabe 10 (6 Punkte)

Sei $A\in\mathbb{R}^{20\times 20}$, $\vec{x}\in\mathbb{R}^{20}$ mit $A\vec{x}=18\vec{x}$. Sei weiter $S\in\mathbb{R}^{20\times 20}$ invertierbar und $B=S^{-1}AS$. Bestimmen Sie ein $\vec{y}\in\mathbb{R}^{20}$ mit $B\vec{y}=18\vec{y}$, oder zeigen Sie, dass so ein $\vec{y}$ nicht existiert.