SS 2002 | Abt. Theoretische Physik
Übungsblatt 1 | J. Bolte und S. Keppeler

Fortgeschrittene Methoden der Quantenmechanik I

1. **Translationen im $\mathbb{R}^d$**

   Translationen im $\mathbb{R}^d$ sind für beliebige $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^d$ durch

   $$T(\boldsymbol{a}) : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^d & \to & \mathbb{R}^d \\ \boldsymbol{x} & \mapsto & \boldsymbol{x} + \boldsymbol{a} \end{array}$$

   gegeben. Wir definieren einen quantenmechanischen Translationsoperator $\hat{U}\big(T(\boldsymbol{a})\big)$ durch

   $$\Big(\hat{U}\big(T(\boldsymbol{a})\big)\,\psi\Big)(\boldsymbol{x}) := \psi(T(\boldsymbol{a})\,\boldsymbol{x}) = \psi(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}) \quad \forall\, \psi \in L^2(\mathbb{R}^d)\,.$$

   Zeige:

   (a) $\hat{U}\big(T(\boldsymbol{a})\big)$ ist unitär auf $L^2(\mathbb{R}^d)$.

   (b) Mithilfe des Impulsoperators $\hat{\boldsymbol{p}} = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\nabla$ kann ein Translationsoperator durch

   $$\hat{U}\big(T(\boldsymbol{a})\big) = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\boldsymbol{a}\hat{\boldsymbol{p}}}$$

   dargestellt werden.

2. **Rotationen im $\mathbb{R}^3$**

   Im $\mathbb{R}^3$ sind Drehungen um eine Achse $\boldsymbol{n}$ um einem Winkel θ durch

   $$R(\boldsymbol{n},\theta) : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \boldsymbol{x} & \mapsto & \cos\theta\,\boldsymbol{x} + (1-\cos\theta)(\boldsymbol{x}\boldsymbol{n})\boldsymbol{n} + \sin\theta(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{x}) \end{array}$$

   gegeben. Wir definieren einen quantenmechanischen Rotationsoperator $\hat{U}\big(R(\boldsymbol{n},\theta)\big)$ durch

   $$\Big(\hat{U}\big(R(\boldsymbol{n},\theta)\big)\,\psi\Big)(\boldsymbol{x}) := \psi(R(\boldsymbol{n},\theta)\,\boldsymbol{x}) \quad \forall\, \psi \in L^2(\mathbb{R}^d)\,.$$

   Zeige:

   (a) $\hat{U}\big(R(\boldsymbol{n},\theta)\big)$ ist unitär auf $L^2(\mathbb{R}^3)$.

   (b) Für alle $\psi \in L^2(\mathbb{R}^3) \cap C^\infty(\mathbb{R}^3)$ gilt

   $$\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\hat{U}\big(R(\boldsymbol{n},\theta)\big)\,\psi\Big)(\boldsymbol{x})\Big|_{\theta=0} = \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\boldsymbol{n}\hat{\boldsymbol{L}}\,\psi(\boldsymbol{x})\,,$$

   wobei $\hat{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{x} \times \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\nabla$ den Drehimpulsoperator bezeichnet.

(c)

$$\hat{U}\big(R(\boldsymbol{n},\theta)\big) = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\theta\boldsymbol{n}\hat{\boldsymbol{L}}} \, .$$

Hinweis: Leite $\psi(R(\boldsymbol{n},\theta)\,\boldsymbol{x})$ nach θ ab; führe $\frac{\partial R}{\partial\theta}(\boldsymbol{n},\theta)$ mithilfe von $R(\boldsymbol{n},\theta+\theta') = R(\boldsymbol{n},\theta)R(\boldsymbol{n},\theta')$ auf $\frac{\partial R}{\partial\theta}(\boldsymbol{n},0)$ zurück.

3. **Impulsoperator auf** $[0,1]$

Sei $\mathcal{H}$ der Hilbertraum

$$\mathcal{H} := L^2\big([0,1]\big) = \left\{\psi : [0,1] \to \mathbb{C};\ \int_0^1 |\psi(x)|^2\,\mathrm{d}x < \infty\right\} .$$

(a) Weiter sei der Operator $\hat{p}_0$ definiert durch

$$\big(\hat{p}_0\phi\big)(x) := \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\phi'(x)$$

für alle $\phi \in \mathcal{D}_{\hat{p}_0}$ mit

$$\mathcal{D}_{\hat{p}_0} := \{\psi \in \mathcal{H}\,;\ \psi' \in \mathcal{H} \quad \text{und} \quad \psi(0) = 0 = \psi(1)\} \, .$$

Zeige: Der zu $(\hat{p}_0, \mathcal{D}_{\hat{p}_0})$ adjungierte Operator ist $(\hat{p}_0^*, \mathcal{D}_{\hat{p}_0^*})$ mit

$$\mathcal{D}_{\hat{p}_0^*} = \{\psi \in \mathcal{H}\,;\ \psi' \in \mathcal{H}\} \supset \mathcal{D}_{\hat{p}_0}$$

und $\big(\hat{p}_0^*\phi\big)(x) := \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\phi'(x)$.
Bemerkung: Da $(\hat{p}_0, \mathcal{D}_{\hat{p}_0}) \neq (\hat{p}_0^*, \mathcal{D}_{\hat{p}_0^*})$ ist der Operator nicht selbstadjungiert!

(b) Sei nun $\hat{p}_\theta$ definiert durch

$$\big(\hat{p}_\theta\phi\big)(x) := \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\phi'(x)$$

auf

$$\mathcal{D}_{\hat{p}_\theta} := \big\{\psi \in \mathcal{H}\,;\ \psi' \in \mathcal{H} \quad \text{und} \quad \psi(1) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\psi(0)\big\} \, .$$

Zeige: Der Operator $(\hat{p}_\theta, \mathcal{D}_{\hat{p}_\theta})$ ist für jedes $\theta \in [0, 2\pi)$ selbstadjungiert.