SS 2002
Übungsblatt 2

Abt. Theoretische Physik
J. Bolte und S. Keppeler

Fortgeschrittene Methoden der Quantenmechanik I

4. **Operator der Komplexkonjugation**

Sei $\hat{K}$ der Operator der Komplexkonjugation (in der Ortsdarstellung), d.h.

$$\hat{K}\psi(\boldsymbol{x}) = \overline{\psi(\boldsymbol{x})} \quad \forall\ \psi \in L^2(\mathbb{R}^d)\,.$$

Zeige:

(a) $\hat{K}$ ist antiunitär und insbesondere antilinear,

(b) $\hat{K}^{-1} = \hat{K}$ und $\hat{K}^2 = \mathbb{1}$.

(c) Ist $\hat{U}$ ein unitärer Operator so sind die Operatoren $\hat{A}_1 := \hat{U}\hat{K}$ und $\hat{A}_2 := \hat{K}\hat{U}$ antiunitär.

(d) Jeder antiunitäre Operator $\hat{A}$ läßt sich als $\hat{A} = \hat{K}\hat{U}$, mit einen unitären Operator $\hat{U}$ schreiben.

5. **Zeitumkehr**

Wir nennen die Schrödingergleichung

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}(\boldsymbol{x},t) = \hat{H}\psi(\boldsymbol{x},t) \qquad (*)$$

zeitumkehrinvariant, falls folgendes gilt: Ist $\psi(\boldsymbol{x},t)$ eine Lösung von $(*)$, so löst $\hat{K}\psi(\boldsymbol{x},t)$ die Schrödingergleichung mit der Substitution $t \mapsto -t$.
Zeige:

(a) $(*)$ ist invariant unter Zeitumkehr genau dann, wenn gilt

$$[\hat{H},\hat{K}] = 0\,.$$

(b) $(*)$ mit dem Hamiltonoperator

$$\hat{H} := \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\nabla - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})\right)^2 + e\phi(\boldsymbol{x})$$

(dabei bezeichnet $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ das magnetische Vektorpotential und $\phi(\boldsymbol{x})$ das elektrische Potential) ist nur dann zeitumkehrinvariant, wenn $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) \equiv 0$.

6. **Pauli-Matrizen**

Die Pauli-Matrizen sind definiert durch

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Zeige ($\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$):

(a) $[\sigma_j, \sigma_k] = 2\mathrm{i}\sigma_l$ für j, k, l zyklisch,

(b) $\sigma_j^2 = \mathbb{1}_2 \quad \forall\, j = 1, 2, 3$,

(c) $(\boldsymbol{\sigma a})(\boldsymbol{\sigma b}) = \boldsymbol{ab} + \mathrm{i}\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$,

(d) $\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{\sigma a}) = \cos(|\boldsymbol{a}|) + \mathrm{i}\dfrac{\boldsymbol{\sigma a}}{|\boldsymbol{a}|}\sin(|\boldsymbol{a}|)$.

7. **Drehen von Spinoren**

Sei $\hat{U}(R(\boldsymbol{n}, \theta))$ der Rotationsoperator aus Aufgabe 2.

(a) Zeige: Für den Erwartungswert

$$\langle \hat{\boldsymbol{L}} \rangle_\psi := \langle \psi, \hat{\boldsymbol{L}}\psi \rangle$$

des Drehimpulsoperators in einem Zustand ψ gilt

$$\langle \hat{\boldsymbol{L}} \rangle_{\hat{U}(R(\boldsymbol{n},\theta))\psi} = R^{-1}(\boldsymbol{n}, \theta)\, \langle \hat{\boldsymbol{L}} \rangle_\psi \qquad \Big(= R(\boldsymbol{n}, -\theta)\, \langle \hat{\boldsymbol{L}} \rangle_\psi\Big).$$

Hinweis: Zeige, daß die linke und die rechte Seite der Gleichung dasselbe Anfangswertproblem in θ erfüllen; benutze dabei

$$[\hat{L}_j, \hat{L}_k] = \mathrm{i}\hbar \sum_{l=1}^{3} \varepsilon_{jkl} \hat{L}_l \quad \text{mit} \quad \varepsilon_{jkl} := \begin{cases} 0, & \text{mindestens zwei Indizes gleich} \\ 1, & j, k, l \text{ zyklisch} \\ -1, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Auf dem Hilbertraum $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathbb{C}^2$ eines Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchens heißt

$$\hat{\boldsymbol{s}} := \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}$$

der Spinoperator. Wir definieren einen neuen (unitären) Rotationsoperator durch

$$\Big(\hat{U}_{1/2}(R(\boldsymbol{n}, \theta))\Psi\Big)(\boldsymbol{x}) := \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\theta \boldsymbol{n}\hat{\boldsymbol{s}}}\, \Psi(R(\boldsymbol{n}, \theta)\boldsymbol{x}) \quad \forall\, \Psi \in \mathcal{H}.$$

(b) Zeige:

$$\hat{U}_{1/2}(R(\boldsymbol{n}, \theta)) = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\theta \boldsymbol{n}\hat{\boldsymbol{J}}}$$

mit dem Operator $\hat{\boldsymbol{J}} := \hat{\boldsymbol{L}} + \hat{\boldsymbol{s}}$ des Gesamtdrehimpulses.

(c) Zeige:

$$\langle \hat{\boldsymbol{s}} \rangle_{\hat{U}_{1/2}(R(\boldsymbol{n},\theta))\Psi} = R^{-1}(\boldsymbol{n}, \theta)\, \langle \hat{\boldsymbol{s}} \rangle_\Psi.$$

(d) Berechne:

$$\Big(\hat{U}_{1/2}(R(\boldsymbol{n}, 2\pi))\Psi\Big)(\boldsymbol{x}).$$