Fortgeschrittene Methoden der Quantenmechanik I

8. **Galilei-Gruppe**

Wir bezeichnen mit $g(R, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{a}, \tau)$ ein Element der Galilei-Gruppe. Dabei charakterisiert $R \equiv R(\boldsymbol{n}, \theta) \in \mathrm{SO}(3)$ ein Drehung (vgl. Aufgabe 2), $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ einen boost, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$ eine räumliche Translation (vgl. Aufgabe 1) und $\tau \in \mathbb{R}$ eine zeitliche Translation. Die Galilei-Gruppe wird definiert durch ihre Wirkung auf Raumzeit-Punkte $(\boldsymbol{x}, t) \in \mathbb{R}^4$,

$$g(\boldsymbol{x}, t) = (R\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}t + \boldsymbol{a}, t + \tau)\,.$$

Berechne:

(a) $g_1 g_2$,

(b) g^{-1}.

9. **Galilei-Invarianz der freien Schrödingergleichung**

Sei $\psi(\boldsymbol{x}, t)$ eine Lösung der Schrödingergleichung

$$\mathrm{i}\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}(\boldsymbol{x}, t) = \hat{H}\psi(\boldsymbol{x}, t)\,, \quad \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\,, \tag{$*$}$$

eines freien Teilchens mit Masse m. Man überzeugt sich leicht, daß $\psi(g(\boldsymbol{x}, t))$ (mit g aus Aufgabe 8) *keine* Lösung der Schrödingergleichung $(*)$ ist. Wir machen stattdessen den Ansatz

$$\phi(\boldsymbol{x}, t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(\boldsymbol{x}, t; g)} \psi(g(\boldsymbol{x}, t))\,.$$

(a) Bestimme eine Phasenfunktion $\theta(\boldsymbol{x}, t; g)$, so daß $\phi(\boldsymbol{x}, t)$ die freie Schrödingergleichung löst.

(b) Wie lautet $\theta(\boldsymbol{x}, t; g^{-1})$?

Definiere nun die Transformation

$$\big(\hat{T}(g)\psi\big)(\boldsymbol{x}, t) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(\boldsymbol{x}, t; g)}\, \psi(g(\boldsymbol{x}, t))$$

mit obigem θ.

(c) Zeige:

$$\hat{T}(g_1)\,\hat{T}(g_2) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi(g_1, g_2)}\,\hat{T}(g_2 g_1)$$

und berechne $\xi(g_1, g_2)$.