SS 2002 Abt. Theoretische Physik
Übungsblatt 4 J. Bolte und S. Keppeler

Fortgeschrittene Methoden der Quantenmechanik I

10. **Die Lie Algebra $\mathfrak{su}(2)$**

Die Lie-Gruppe SU(2) ist definiert durch die Gruppe der unitären 2×2-Matrizen mit Determinante 1,

$$G = \mathrm{SU}(2) = \left\{ g = \begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix};\ |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\} \qquad (\dim_{\mathbb{R}} G = 3)\,.$$

(a) Zeige: Es existiert eine Parametrisierung der Form

$$g(x_0, \boldsymbol{x}) = x_0 \mathbb{1}_2 + \mathrm{i}\boldsymbol{x\sigma}\,, \quad x_0^2 + \boldsymbol{x}^2 = 1\,,$$

mit den Pauli-Matrizen $\boldsymbol{\sigma}$.

(b) Betrachte nun Einparameter-Untergruppen

$$G_k := \left\{ g_k(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tX_k};\ t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Wie lauten die Erzeuger X_k für $g_k(t) = \mathbb{1}_2 \cos(t/2) - \mathrm{i}\sigma_k \sin(t/2)$?
`Hinweis`: Siehe Aufgabe 6.

(c) Bestimme die Strukturkonstanten c_{jkl} definiert durch $[X_j, X_k] = \mathrm{i}\sum_{l=1}^3 c_{jkl} X_l$. Welche andere bekannte Lie-Algebra hat dieselben Vertauschungsrelationen?

(d) Wir definieren: $X_\pm := X_1 \pm \mathrm{i}X_2$. Zeige:

$$[X_3, X_\pm] = \pm X_\pm \quad \text{und} \quad [X_+, X_-] = 2X_3\,.$$

11./12. **Darstellungen von SU(2) und $\mathfrak{su}(2)$**

Um die unitären, irreduziblen Darstellungen ("irreps") der Gruppe $G = \mathrm{SU}(2)$ zu bestimmen, berechnen wir zunächst diejenigen der Lie-Algebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(2)$. Sei $\pi_s : G \to U(V_s)$ eine endlich dimensionale unitäre irrep von SU(2) auf dem Vektorraum V_s, d.h. $d_s := \dim V_s < \infty$. Die Darstellungsmatrizen der Erzeuger,

$$\hat{X}_k := \mathrm{d}\pi_s(X_k) = \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\pi_s\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tX_k}\right)\Big|_{t=0}\,,$$

sind hermitesch auf V_s. Daraus folgt: $\hat{X}_3$ besitzt einen Eigenvektor $v_m \in V_s$ mit Eigenwert $m \in \mathbb{R}$, d.h. $\hat{X}_3\, v_m = m\, v_m$.

(a) Zeige: Falls $\hat{X}_\pm\, v_m \neq 0$, so ist $\hat{X}_\pm\, v_m$ Eigenvektor von $\hat{X}_3$ zum Eigenwert $m \pm 1$.

(b) Zeige: Es gibt einen höchsten und einen niedrigsten Eigenwert $m_{\max}$ bzw. $m_{\min}$.
`Hinweis`: Wende $\hat{X}_\pm$ mehrfach auf v_m an und beachte $d_s < \infty$.
`Bemerkung`: $\{m_{\min}, m_{\min}+1, \ldots, m_{\max}-1, m_{\max}\} \subseteq \operatorname{spec}\hat{X}_3$.

(c) Es sei $v_{m_{\max}} \in V_s$ mit $\hat{X}_3\, v_{m_{\max}} = m_{\max}\, v_{m_{\max}}$, d.h. $\hat{X}_+\, v_{m_{\max}} = 0$. Definiere

$$v_{m_{\max}-k} := \hat{X}_-^k\, v_{m_{\max}}$$

und zeige: $\hat{X}_3\, v_{m_{\max}-k} = (m_{\max}-k)\, v_{m_{\max}-k}$.
`Hinweis`: Mache eine Induktion nach k.

(d) Zeige: Für $m < m_{\max}$ gilt

$$\hat{X}_+\, v_m = a_m\, v_{m+1}\,, \quad a_m \in \mathbb{R}\,.$$

`Hinweis`: Schreibe $m = m_{\max} - k$ und mache eine Induktion nach k.
`Bemerkung`: Man findet $a_{m_{\max}-(k+1)} = a_{m_{\max}-k} + 2(m_{\max}-k)$, $a_{m_{\max}-1} = 2m_{\max}$.

(e) Wir definieren den Casimir-Operator

$$\hat{\Delta} := \hat{X}_1^2 + \hat{X}_2^2 + \hat{X}_3^2\,.$$

Zeige:
(i) $\hat{\Delta} = \hat{X}_+\hat{X}_- + \hat{X}_3(\hat{X}_3 - 1)$ und $\hat{\Delta} v_m = (a_{m-1} + m(m-1))\, v_m$.
(ii) $[\hat{\Delta}, \hat{X}] = 0$ für alle $\hat{X} = \sum_{k=1}^{3} c_k \hat{X}_k$, $c_k \in \mathbb{C}$.
Da die Darstellung irreduzibel ist, folgt daraus (warum?): $\hat{\Delta} = \lambda \mathbb{1}_{d_s}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
(iii) $\lambda = m_{\max}(m_{\max}+1)$ (`Hinweis`: Wende $\hat{\Delta}$ auf $v_{m_{\max}}$ an).

(f) Zeige: $a_m = (m_{\max} - m)(m_{\max} + m + 1)$
`Hinweis`: Wende $\hat{\Delta} = m_{\max}(m_{\max}+1)\, \mathbb{1}_{d_s}$ auf v_m an.

(g) Zeige: $m_{\max} = s$, $m_{\min} = -s$ mit $s := \frac{m_{\max}-m_{\min}}{2} \in \frac{1}{2}\mathbb{N}_0$.
`Hinweis`: Wende $[\hat{X}_+, \hat{X}_-] = 2\hat{X}_3$ auf $v_{m_{\min}}$ an.
`Bemerkung`: Damit gilt $d_s = \dim V_s = 2s+1$ (warum?)
und $\hat{\Delta} = s(s+1)\, \mathbb{1}_{2s+1}$.

(h) Zeige: Für $s = 0, \frac{1}{2}$ gibt es unitäre irreps von SU(2).
`Hinweis`: Eventuell sind diese schon bekannt...