SS 2002 Abt. Theoretische Physik
Übungsblatt 6 J. Bolte und S. Keppeler

Fortgeschrittene Methoden der Quantenmechanik I

16. **Verschränkte Zustände**

Im Hilbertraum $\mathcal{H}_1 := L^2([0,1])$ ist eine ON-Basis gegeben durch

$$\varphi_n(x) = \mathrm{e}^{2\pi i n x}\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,.$$

Betrachte in $\mathcal{H} := \mathcal{H}_1 \otimes \mathbb{C}^2$ den Zustand

$$\Psi = \varphi_n \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \varphi_m \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\,.$$

(a) Für welche Paare $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$ läßt sich Ψ als Tensorprodukt schreiben, d.h. wann gilt

$$\Psi = \psi \otimes v \quad \text{mit} \quad \psi \in \mathcal{H}_1\,, \quad v \in \mathbb{C}^2\ ?$$

(Beweis!)
Gib für diese Fälle explizit eine Wahl der Vektoren ψ und v an.

(b) Sei $\hat{A}$ ein linearer Operator auf $\mathcal{H}_1$. Berechne den Erwartungswert von $\hat{\mathcal{A}} := \hat{A} \otimes \mathbb{1}_2$ im Zustand Ψ. Unter welchen Bedingungen gibt es eine Wellenfunktion $\psi \in \mathcal{H}_1$, so daß

$$\langle \Psi,\, \hat{\mathcal{A}}\Psi \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \psi,\, \hat{A}\psi \rangle_{\mathcal{H}_1}$$

für beliebige lineare Operatoren $\hat{A}$?

`Bemerkung`: Wir schreiben auch

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_n(x) \\ \varphi_m(x) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \hat{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} \hat{A} & 0 \\ 0 & \hat{A} \end{pmatrix}\,.$$

17. **Einfaches Modell für den Fock-Raum**

Sei $\mathcal{H} = l_2(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \cdots$ der Hilbertraum der quadratsummierbaren Folgen:

$$\psi \in \mathcal{H} \quad \text{mit} \quad \psi = (\psi_0, \psi_1, \psi_2, \ldots) \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |\psi_n|^2 < \infty \, .$$

Das Skalarprodukt in $\mathcal{H}$ lautet

$$\langle \psi, \varphi \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{\psi_n} \, \varphi_n \, .$$

Definiere einen Operator $\hat{a}$ auf

$$\mathcal{D}_{\hat{a}} := \left\{ \psi \in \mathcal{H} \, ; \, \sum_{n=0}^{\infty} n |\psi_n|^2 < \infty \right\}$$

durch $(\hat{a}\psi)_n = \sqrt{n+1} \, \psi_{n+1}$.

(a) Wie wirkt $\hat{a}$ auf den Vektor $\omega = (1, 0, 0, \ldots)$?

(b) Wie lautet der zu $(\hat{a}, \mathcal{D}_{\hat{a}})$ adjungierte Operator $(\hat{a}^*, \mathcal{D}_{\hat{a}^*})$?

(c) Auf welchem gemeinsamen Definitionsbereich $\mathcal{D}_{\hat{N}}$ lassen sich die Operatoren $\hat{a}\hat{a}^*$ und $\hat{a}^*\hat{a}$ definieren? Wie lautet der Kommutator $[\hat{a}, \hat{a}^*]$ auf $\mathcal{D}_{\hat{N}}$?

(d) Betrachte den Operator $\hat{N} := \hat{a}^*\hat{a}$. Zeige, daß jedes $n \in \mathbb{N}_0$ Eigenwert von $\hat{N}$ ist und gib normierte Eigenvektoren $\varphi^{(n)}$ explizit an. Zeige außerdem:

$$\varphi^{(n)} = \frac{(\hat{a}^*)^n}{\sqrt{n!}} \, \omega \, .$$

Welche Bedeutung hat der Operator $\hat{N}$?

(e) Zeige für $\alpha \in \mathbb{C}$:
(i) $\hat{U}(\alpha) := \mathrm{e}^{\alpha\hat{a}^* - \overline{\alpha}\hat{a}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}|\alpha|^2} \, \mathrm{e}^{-\overline{\alpha}\hat{a}} \, \mathrm{e}^{\alpha\hat{a}^*} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \, \mathrm{e}^{\alpha\hat{a}^*} \, \mathrm{e}^{-\overline{\alpha}\hat{a}}$,
(ii) $\hat{U}(\alpha) \, \hat{U}(\alpha)^* = \mathbb{1}_{\mathcal{H}}$.

`Hinweis`: Verwende die Baker-Campbell-Hausdorff-Formel.

(f) Für $\alpha \in \mathbb{C}$ definiere den kohärenten Vektor $\varphi_\alpha := \hat{U}(\alpha)\omega$. Zeige:
(i) $\|\varphi_\alpha\| = 1$,
(ii) $\hat{a}\varphi_\alpha = \alpha\varphi_\alpha$.

`Hinweis`: Die Beziehung aus Aufgabe 13a ist eventuell hilfreich.