SS 2002 | Abt. Theoretische Physik
Übungsblatt 7 | J. Bolte und S. Keppeler

Fortgeschrittene Methoden der Quantenmechanik I

18. **Verschobener Oszillator**

Wir definieren den verschobenen harmonischen Oszillator auf $l_2(\mathbb{C})$ durch den Hamiltonoperator

$$\hat{H} := \hat{H}_0 + \hat{H}_{\mathrm{I}} \qquad \text{mit} \quad \hat{H}_0 := \hbar\omega \left(\hat{a}^* \hat{a} + \frac{1}{2} \right) , \quad H_{\mathrm{I}} := \lambda(\hat{a} + \hat{a}^*) \, .$$

Dabei bezeichnen $\hat{a}^*$ und $\hat{a}$ die Erzeugungs- und Vernichtunsoperatoren aus Aufgabe 17. Weiter gelten die Definitionen für die unitären Operatoren $\hat{U}(\alpha)$ aus Aufgabe 17e, wobei wir im Folgenden nur reelle α betrachten, d.h.

$$\hat{U}(\alpha) = \mathrm{e}^{\alpha(\hat{a}^* - \hat{a})} \quad \Rightarrow \quad \hat{U}(\alpha)^* = \mathrm{e}^{-\alpha(\hat{a}^* - \hat{a})} = \hat{U}(-\alpha) \, .$$

Zeige:

(a) $\hat{U}(-\alpha)\, \hat{a}\, \hat{U}(\alpha) = \hat{b}$ und $\hat{U}(-\alpha)\, \hat{a}^*\, \hat{U}(\alpha) = \hat{b}^*$, wobei $b := \hat{a} + \alpha$,

(b) $[\hat{b}, \hat{b}^*] = 1$ und $[\hat{b}, \hat{b}] = 0 = [\hat{b}^*, \hat{b}^*]$,

(c) $\hat{U}(-\alpha)\, \hat{a}^* \hat{a}\, \hat{U}(\alpha) = \hat{b}^* \hat{b}$.

(d) Zeige weiter, daß das Spektrum von $\hat{H}$ durch

$$\mathrm{spec}(\hat{H}) = \left\{ \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} - \left(\frac{\lambda}{\hbar\omega} \right)^2 \right) ; \; n \in \mathbb{N}_0 \right\} .$$

gegeben ist. `Hinweis`: Zeige zunächst $\hat{U}(-\alpha)\, \hat{H}_0\, \hat{U}(\alpha) = \hat{H} + \frac{\lambda^2}{\hbar\omega}$ mit $\alpha = \frac{\lambda}{\hbar\omega}$.

(e) Seien $\psi^{(n)}$ und $\varphi^{(n)}$ normierte Eigenvektoren von $\hat{H}_0$ und $\hat{H}$,

$$\hat{H}_0 \psi^{(n)} = E_n \psi^{(n)} \quad \text{und} \quad \hat{H} \varphi^{(n)} = \left(E_n - \frac{\lambda^2}{\hbar\omega} \right) \varphi^{(n)} \, .$$

Stelle $\varphi^{(n)}$ mithilfe von $\hat{U}(\alpha)$ und $\psi^{(n)}$ dar; zeige insbesondere, daß der Grundzustand von $\hat{H}$ durch einen kohärenten Vektor (vgl. Aufgabe 17f) gegeben ist.

19. **Fermionischer Oszillator**

Auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}_{\mathrm{F}}$ seien Operatoren $\hat{f}$ und $\hat{f}^*$ mit den Eigenschaften

$$\{\hat{f}^*, \hat{f}\} := \hat{f}^* \hat{f} + \hat{f} \hat{f}^* = \mathbb{1} \quad \text{und} \quad \{\hat{f}, \hat{f}\} = 0 = \{\hat{f}^*, \hat{f}^*\}$$

definiert.

(a) Zeige: $\hat{f}^2 = 0 = \hat{f}^{*2}$

(b) Interpretiere $\hat{f}^*$ und $\hat{f}$ als Erzeuger und Vernichter:
Sei ω_{F} das (fermionische) Vakuum, d.h. $\hat{f}\omega_{\mathrm{F}} = 0$ (mit $\|\omega_{\mathrm{F}}\| = 1$).
Zeige: $\hat{f}^*\omega_{\mathrm{F}} \perp \omega_{\mathrm{F}}$ und $\|\hat{f}^*\omega_{\mathrm{F}}\| = 1$.
Definiere: $\mathcal{H}_{\mathrm{F}} := \left\langle \{\hat{f}^{*n}\omega_{\mathrm{F}}\}_{n\in\mathbb{N}_0} \right\rangle$ (warum?) und zeige $\mathcal{H}_{\mathrm{F}} \cong \mathbb{C}^2$.

(c) Realisiere $\hat{f}$ und $\hat{f}^*$ explizit als 2×2-Matrizen; wähle dabei

$$\omega_{\mathrm{F}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \hat{f}^*\omega_F = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Stelle $\hat{f}$ und $\hat{f}^*$ außerdem als Linearkombination der Pauli-Matrizen dar und zeige $[\hat{f}, \hat{f}^*] = -\sigma_z$.

(d) Definiere den fermionischen „Teilchenzahloperator“ $\hat{N}_{\mathrm{F}} := \hat{f}^*\hat{f}$.
Zeige: $\hat{N}_{\mathrm{F}} = \frac{1}{2}(1 - [\hat{f}, \hat{f}^*])$ und gib Eigenwerte und normierte Eigenvektoren von $\hat{N}_{\mathrm{F}}$ an.

(e) Wir definieren den „fermionischen Oszillator“ durch den Hamiltonoperator

$$\hat{H}_{\mathrm{F}} := \hbar\omega \left(\hat{N}_{\mathrm{F}} + \frac{1}{2} \right).$$

Zeige: $\hat{H}_{\mathrm{F}} = \hbar\omega \left(1 - \frac{1}{2}[\hat{f}, \hat{f}^*] \right)$, und gib das Spektrum von $\hat{H}_{\mathrm{F}}$ an.

20. **Supersymmetrischer (SUSY) Oszillator**

Betrachte den Hilbertraum $\mathcal{H}_{\mathrm{SUSY}} := \mathcal{H}_{\mathrm{B}} \otimes \mathcal{H}_{\mathrm{F}}$ mit $\mathcal{H}_{\mathrm{B}} = l_2(\mathbb{C})$ und $\mathcal{H}_{\mathrm{F}} = \mathbb{C}^2$, d.h für Vektoren $\psi \in \mathcal{H}_{\mathrm{SUSY}}$ schreiben wir

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \psi_j = (\psi_{j,0}, \psi_{j,1}, \ldots) \in l_2(\mathbb{C}).$$

Definiere die „SUSY-Ladungen“

$$\hat{Q} := \hat{a}^* \otimes \hat{f} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \hat{a}^* & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \hat{Q}^* := \hat{a} \otimes \hat{f}^* = \begin{pmatrix} 0 & \hat{a} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

(a) Wie wirken $\hat{Q}$ und $\hat{Q}^*$ auf Vektoren

$$\varphi^{(m.n)} := \varphi^{(m)} \otimes \omega_{\mathrm{F}} + \varphi^{(n)} \otimes \hat{f}^*\omega_{\mathrm{F}} = \begin{pmatrix} \varphi^{(n)} \\ \varphi^{(m)} \end{pmatrix},$$

wobei $\varphi^{(n)}$ die Vektoren aus Aufgabe 17d bezeichnet?

(b) Zeige: $\{\hat{Q}, \hat{Q}\} = 0 = \{\hat{Q}^*, \hat{Q}^*\}$ und $\{\hat{Q}, \hat{Q}^*\} = \hat{a}^*\hat{a} \otimes \mathbb{1}_{\mathrm{F}} + \mathbb{1}_{\mathrm{B}} \otimes \hat{f}^*\hat{f}$.

(c) Definiere den SUSY-Oszillator durch den Hamiltonoperator

$$\hat{H}_{\mathrm{SUSY}} := \hbar\omega \left\{ \hat{Q}, \hat{Q}^* \right\}$$

Zeige:

$$\hat{H}_{\mathrm{SUSY}} = \hat{H}_{\mathrm{B}} \otimes \mathbb{1}_{\mathrm{F}} + \mathbb{1}_{\mathrm{B}} \otimes \hat{H}_{\mathrm{F}} - \hbar\omega\, \mathbb{1}_{\mathrm{SUSY}}$$

und

$$[\hat{H}_{\mathrm{SUSY}}, \hat{Q}] = 0 = [\hat{H}_{\mathrm{SUSY}}, \hat{Q}^*].$$