Fortgeschrittene Methoden der Quantenmechanik I

21. **Fermionischer Fockraum**

Wir definieren den fermionischen Fockraum $\mathcal{F}^a$ analog zum bosonischen Fockraum durch

$$\mathcal{F}^{\mathrm{a}} := \bigoplus_{N=0}^{\infty} \mathcal{H}_N^{\mathrm{a}} \qquad \text{mit} \qquad \mathcal{H}_N^{\mathrm{a}} := \hat{P}_N^{\mathrm{a}} \bigotimes_{k=1}^{N} \mathcal{H}_1 \, .$$

Weiter sei $\mathcal{H}_1 := L^2(\mathbb{R}^d)$, und $\hat{P}_N^{\mathrm{a}}$ bezeichnet den Antisymmetrisierungsoperator aus Aufgabe 14. Ausgehend von einem $\varphi \in \mathcal{H}_1$ definieren wir den Vernichtungsoperator $\hat{a}(\varphi)$ durch

$$\big(\hat{a}(\varphi)\Psi\big)_N(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_N) = \sqrt{N+1} \int_{\mathbb{R}^d} \overline{\varphi(\boldsymbol{x})} \, \psi_{N+1}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_N) \, \mathrm{d}^d x$$

Zeige:

(a) $\big(\hat{a}^*(\varphi)\Psi\big)_N(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_N) = \dfrac{1}{\sqrt{N}} \displaystyle\sum_{k=1}^{N} (-1)^k \, \varphi(\boldsymbol{x}_k) \, \psi_{N-1}(\ldots, \boldsymbol{x}_{k-1}, \boldsymbol{x}_{k+1}, \ldots)$,

(b) $\{\hat{a}(\varphi), \hat{a}^*(\chi)\} = \langle \varphi, \chi \rangle_1, \quad \{\hat{a}(\varphi), \hat{a}(\chi)\} = 0 = \{\hat{a}^*(\varphi), \hat{a}^*(\chi)\}$,

(c) $\hat{a}^*(\varphi)\hat{a}(\varphi)$ hat nur Eigenwerte $0, 1$ und ist ein Projektor,

(d) für den Teilchenzahloperator $\hat{N}$ mit $(\hat{N}\Psi)_N = N\psi_N$ gilt

$$\hat{N} = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{a}^*(\boldsymbol{x}) \, \hat{a}(\boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}^d x$$

mit $\hat{a}(\varphi) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \overline{\varphi(\boldsymbol{x})} \, \hat{a}(\boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}^d x$ und $\hat{a}^*(\varphi) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(\boldsymbol{x}) \, \hat{a}^*(\boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}^d x$.

22. **Quasiteilchen**

Sei $\mathcal{K}$ ein endlichdimensionaler Teilraum von $\mathcal{H}_1$, $\hat{P}_\mathcal{K}$ der Projektor auf diesen Raum und $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_K\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{K}$. Betrachte den Vektor $\Phi_\mathcal{K} \in \mathcal{F}^a$ definiert durch

$$\Phi_\mathcal{K} := \hat{a}^*(\varphi_1) \cdots \hat{a}^*(\varphi_K)\Omega,$$

wobei Ω den Vakuumvektor mit $\Omega_N = \delta_{N0}$ bezeichnet.

(a) Zeige: $\quad \hat{a}(\hat{P}_\mathcal{K}\,\varphi)^*\,\Phi_\mathcal{K} = 0 \quad$ und $\quad \hat{a}\big((1-\hat{P}_\mathcal{K})\,\varphi\big)\,\Phi_\mathcal{K} = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{H}_1.$

Definiere die Operatoren

$$\hat{A}(\varphi) := \hat{a}(\hat{P}_\mathcal{K}\,\varphi)^* + \hat{a}\big((1-\hat{P}_\mathcal{K})\,\varphi\big)$$

und zeige

(b)
$$\{\hat{A}(\varphi), \hat{A}^*(\chi)\} = \langle \varphi, (1-\hat{P}_\mathcal{K})\,\chi\rangle_1 + \langle \chi, \hat{P}_\mathcal{K}\,\varphi\rangle_1 \tag{$*$}$$

und

$$\{\hat{A}(\varphi), \hat{A}(\chi)\} = 0 = \{\hat{A}^*(\varphi), \hat{A}^*(\chi)\}\,.$$

Wir möchten $\hat{A}(\varphi)$ als Vernichtungsoperator für Quasiteilchen interpretieren. Dazu zeigen wir, daß die rechte Seite von Gleichung $(*)$ als Skalarprodukt in einem geeigneten Einteilchen-Hilbertraum aufgefaßt werden kann; vgl. Aufgabe 21(b).

Der Einteilchen-Hilbertraum für Quasiteilchen sei durch

$$\mathcal{H}_1^\mathcal{K} := (1-\hat{P}_\mathcal{K})\mathcal{H}_1 \oplus \overline{\hat{P}_\mathcal{K}\mathcal{H}_1}$$

gegeben, d.h. aus jedem $\varphi \in \mathcal{H}_1$ geht durch

$$\tilde{\varphi} := (1-\hat{P}_\mathcal{K})\,\varphi + \overline{\hat{P}_\mathcal{K}\,\varphi}$$

ein $\tilde{\varphi} \in \mathcal{H}_1^\mathcal{K}$ hervor. Weiter definieren wir den Quasiteilchen-Fockraum durch

$$\mathcal{F}^\mathcal{K} := \bigoplus_{N=0}^{\infty} \mathcal{H}_N^\mathcal{K} \qquad \text{mit} \qquad \mathcal{H}_N^\mathcal{K} := \hat{P}_N^{\mathrm{a}} \bigotimes_{k=1}^{N} \mathcal{H}_1^\mathcal{K}\,.$$

(c) Zeige: Durch

$$\langle \tilde{\varphi}, \tilde{\chi}\rangle_{\mathcal{H}_1^\mathcal{K}} := \langle \varphi, (1-\hat{P}_\mathcal{K})\,\chi\rangle_1 + \langle \chi, \hat{P}_\mathcal{K}\,\varphi\rangle_1$$

wird auf $\mathcal{H}_1^\mathcal{K}$ ein Skalarprodukt definiert.