SS 2002 | Abt. Theoretische Physik
Übungsblatt 9 | J. Bolte und S. Keppeler

Fortgeschrittene Methoden der Quantenmechanik I

23. **Die Überlagerungsabbildung $\varphi : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$**

Die Matrix-Gruppe SU(2) ist gegegben durch die unitären 2×2-Matrizen mit Determinante 1,

$$\mathrm{SU}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix};\ |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}.$$

Ein Element $g \in \mathrm{SU}(2)$ läßt sich schreiben als

$$g = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\theta}{2}\boldsymbol{n}\boldsymbol{\sigma}} \quad \text{mit} \quad |\boldsymbol{n}| = 1 \quad \text{und} \quad \theta \in [0, 4\pi)\,,$$

und ein Element X der Lie-Algebra $\mathfrak{su}(2)$ läßt sich schreiben als $X = \boldsymbol{x}\boldsymbol{\sigma}$ mit $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$; vergleiche mit Aufgabe 10. Für jedes $g \in \mathrm{SU}(2)$ betrachten wir nun die Abbilddung

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}_g : \mathfrak{su}(2) &\to \mathfrak{su}(2) \\ X &\mapsto gXg^{-1}\,. \end{aligned}$$

Zeige:

(a) $g \mapsto \mathrm{Ad}_g$ ist eine Darstellung (die *adjungierte Darstellung*) der Gruppe SU(2) auf ihrer Lie-Algebra $\mathfrak{su}(2)$ (aufgefaßt als Vektorraum).

(b) Dies induziert eine orthogonale Transformation $\boldsymbol{x} \mapsto \varphi(g)\boldsymbol{x}$ des $\mathbb{R}^3$ durch $\mathrm{Ad}_g X = \big(\varphi(g)\boldsymbol{x}\big)\boldsymbol{\sigma}$, wobei $X = \boldsymbol{x}\boldsymbol{\sigma}$.
`Hinweis`: Zeige zunächst (i) die Linearität der Transformation und (ii) daß $\det X = -|\boldsymbol{x}|^2$.

(c) $\varphi\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\theta}{2}\boldsymbol{n}\boldsymbol{\sigma}}\right) = R(\boldsymbol{n}, \theta) \in \mathrm{SO}(3)$ (Drehung um $\boldsymbol{n}$ mit Winkel θ).
`Hinweis`: Berechne $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\theta}{2}\boldsymbol{n}\boldsymbol{\sigma}}\,\boldsymbol{x}\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}\boldsymbol{n}\boldsymbol{\sigma}}$; vgl. Aufgabe 7c.

(d) Die Abbildung $\varphi : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$ ist zwei zu eins.

24. **Darstellungen von SU(2)**

Sei $\tilde{V}_s$ der 2^{2s}-dimensionale Hilbertraum

$$\tilde{V}_2 := \bigotimes_{j=1}^{2s} \mathbb{C}^2 \,, \quad s \in \mathbb{N}/2 \,,$$

und für $g \in \mathrm{SU}(2)$ sei die lineare Abbildung $\tilde{\pi}_s(g) : \tilde{V}_s \to \tilde{V}_s$ definiert durch

$$\tilde{\pi}_s(g) : v_1 \otimes \ldots \otimes v_{2s} \;\mapsto\; gv_1 \otimes \ldots \otimes gv_{2s} \,.$$

(a) Zeige: $\tilde{\pi}_s$ definiert eine unitäre Darstellung von SU(2).

Der (lineare) Symmetrisierungsoperator $\hat{P}^{\mathrm{s}}_{2s}$ sei definiert durch

$$\hat{P}^{\mathrm{s}}_{2s} : v_1 \otimes \ldots \otimes v_{2s} \;\mapsto\; \frac{1}{(2s)!} \sum_{\rho \in S_{2s}} v_{\rho(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\rho(2s)} \,.$$

Zeige:

(b) Der Unterraum $V_s := \hat{P}^{\mathrm{s}}_{2s} \tilde{V}_s$ ist invariant unter $\tilde{\pi}_s(\mathrm{SU}(2))$, d.h. $\tilde{\pi}_s$ ist reduzibel.

(c) $\dim V_s = 2s + 1$.
`Hinweis`: Zeige zunächst, daß durch $\{v_k \,,\; 0 \leq k \leq 2s\}$,

$$v_k := \hat{P}^{\mathrm{s}}_{2s} \left(\bigotimes_{j=1}^{k} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \bigotimes_{j=k+1}^{2s} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right),$$

eine Orthogonalbasis von V_s gegeben ist.

(d) Durch

$$\pi_s : \mathrm{SU}(2) \to L(V_s) \,, \quad \pi_s(g) := \tilde{\pi}_s(g) \circ \hat{P}^{\mathrm{s}}_{2s}$$

wird auf V_s eine unitäre Darstellung von SU(2) definiert.

Betrachte nun die abgeleiteten Darstellungen $\hat{X}_j$ der Generatoren $\sigma_j/2$ von SU(2),

$$\hat{X}_j := \mathrm{i} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \pi_s \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda \frac{\sigma_j}{2}} \right) \Big|_{\lambda = 0} \,.$$

Zeige:

(e) $\hat{X}_j = \sum_{k=1}^{2s} \bigotimes_{l=1}^{k} \mathbb{1}_2 \otimes \frac{\sigma_j}{2} \otimes \bigotimes_{l=k+1}^{2s} \mathbb{1}_2$.

(f) $\hat{X}_3 \, v_k = (k - s) \, v_k$, d.h. π_s ist die unitäre, (2s+1)-dimensionale irrep von SU(2).