SS 2002 | Abt. Theoretische Physik
Übungsblatt 10 | J. Bolte und S. Keppeler

Fortgeschrittene Methoden der Quantenmechanik I

25. **Die Lie-Algebra von** $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \ltimes \mathbb{R}^4$

Wir betrachten die 10-dimensionale Lie-Gruppe

$$G := \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \ltimes \mathbb{R}^4 = \big\{(A,a)\,;\ A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})\,,\ a \in \mathbb{R}^4\big\}\ .$$

Dabei ist die Matrixgruppe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ gegeben durch die Menge der komplexen 2×2-Matrizen mit Determinante 1, d.h.

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) = \{A \in \mathbb{C}^{2,2}\,;\ \det A = 1\} \quad \Longrightarrow \quad \dim \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) = 6\,.$$

Die Multiplikation im semidirekten Produkt $G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \ltimes \mathbb{R}^4$ sei definiert durch

$$(A_1,a_1)\circ(A_2,a_2) := (A_1A_2, \Lambda(A_1)a_2 + a_1)\,,$$

wobei wir mit $\Lambda(A) \in \mathcal{L}_+^\uparrow$ die zu $A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ gehörige (eigentliche, orthochrone) Lorentz-Transformation bezeichnen (vgl. Vorlesung). Jedes Element $g \in G$ läßt sich als Produkt von je einem Element der folgenden drei Untergruppen darstellen:

(i) $H_1 := \{(\mathbb{1}_2, a)\,;\ a \in \mathbb{R}^4\} \cong \mathbb{R}^4$; $\dim H_1 = 4$.
(ii) $H_2 := \{(A,0)\,;\ A \in \mathrm{SU}(2)\} \cong \mathrm{SU}(2)$; $\dim H_2 = 3$.
(iii) $H_3 := \Big\{(A,0)\,;\ A = x^0\mathbb{1}_2 + \boldsymbol{x\sigma}\,,\ {x^0}^2 - \boldsymbol{x}^2 = 1\Big\}$; $\dim H_3 = 3$.

(a) Zeige:

$$\big(\hat{U}((A,a))\psi\big)(x) = \psi\big(\Lambda(A)^{-1}(x-a)\big) \quad \forall\ \psi \in L^2(\mathbb{R}^4)$$

definiert eine unitäre Darstellung von G auf $L^2(\mathbb{R}^4)$.

(b) Bestimme die abgeleiteten Darstellungen der Generatoren $P_0, P_1, P_2, P_3, J_1, J_2, J_3$ und K_1, K_2, K_3 der Untergruppen H_1, H_2 und H_3, die zusammen die Generatoren von G bilden.

`Hinweis`: Betrachte dazu die Darstellungen der folgenden Einparameter-Untergruppen ($t \in \mathbb{R}$)

(i) $g_k^{(1)} := (\mathbb{1}_2, te_k)\,,\ k = 0,1,2,3\,,\ e_0 = (1,0,0,0)\,,\ e_1 = (0,1,0,0)\,,\dots$
(ii) $g_k^{(2)} := \big(\mathbb{1}_2\cos(t/2) - \mathrm{i}\sigma_k\sin(t/2), 0\big)\,,\ k = 1,2,3$; vgl. Aufgabe 10.
(iii) $g_k^{(3)} := \big(\mathbb{1}_2\cosh(t/2) - \sigma_k\sinh(t/2), 0\big)\,,\ k = 1,2,3$.

Vergleiche auch mit den Aufgaben 1 und 2!

(c) Berechne die Vertauschungsrelationen der Generatoren aus (b).