Universität Ulm **Prof. Dr. W. Forst**
Abteilung Mathematik VI (Numerik) **S. Keppeler**

Übungen zu Höhere Mathematik III für Elektrotechniker Blatt 2

Abgabe am Freitag, den 20.10.1998 um 10:00 Uhr

6. Untersuche die folgenden Funktionen[1] $f(z)$ auf Differenzierbarkeit und Holomorphie. Gib f, falls möglich, explizit als Funktion von z an.

   a) $f(z) = x^2 + y^2 + 2\mathrm{i}xy\,,$
   b) $f(z) = x^2 - 3xy + \mathrm{i}(3xy - y^2)\,,$
   c) $f(z) = \cos y \cosh x + \mathrm{i} \sin y \sinh x\,,$

7. Bestimme $\zeta \in \mathbb{C}$ so, daß $f(z)$ holomorph in $\mathbb{C}$ ist. Gib $f(z)$ dann explizit als Funktion von z an.

   a) $f(z) = x^2 + \zeta y^2 + 2\mathrm{i}xy - 5\,,$
   b) $f(z) = \mathrm{e}^{2x+\mathrm{i}\zeta y}\big(\cos(-2y)\cos(3x) + \sin(2y)\sin(-3x) + \mathrm{i}\sin(2y+3x)\big)\,.$

8. Welche der folgenden Funktionen $u(x,y)$ können Realteil einer in $\mathbb{C}$ holomorphen Funktion $f(z)$ sein? Berechne gegebenenfalls $f(z)$.

   a) $u(x,y) = x^3 - 3xy^2\,,$
   b) $u(x,y) = \sin(x^2+y^2)\,,$
   c) $u(x,y) = \cos x \sinh y\,,$
   d) $u(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, für $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}\,.$

9. a) Stelle die Umkehrfunktion von $\sin z$ für $|\mathrm{Re} z| < \frac{\pi}{2}$ mit Hilfe des Hauptzweigs des komplexen Logarithmus' $\log z = \log|z| + \mathrm{i}\arg z$ dar.
   b) Berechne $(\arcsin z)'\big|_{z=1-\mathrm{i}}\,.$

10. Berechne die folgenden Kurvenintegrale:

    a) $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z}}$, $\mathcal{C}$ der positiv orientierte Einheitskreis,
    b) $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \frac{\mathrm{d}z}{z}$, $\mathcal{C}$ die geradlinige Verbindung von e nach i,
    c) $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} (3z^2 + \sin z)\,\mathrm{d}z$, $\mathcal{C}$ die positiv orientierte Ellipse mit Halbachsen der Länge 2 (in x-Richtung) und 3 (in y-Richtung).

[1] Für alle Aufgaben gilt: $z = x + \mathrm{i}y,\ x, y \in \mathbb{R}$.

Aufgabenvorschläge für die Tutorien am 27.10.98

1. Untersuche die folgenden Funktionen $f(z)$ auf Differenzierbarkeit und Holomorphie. Gib f, falls möglich, explizit als Funktion von z an.

   a) $f(z) = x^3 - 3xy^2 - \mathrm{i}y^3 + \mathrm{i}3x^2y\,,$
   b) $f(z) = y\sin^2 x + \mathrm{i}\mathrm{e}^x \cos y\,.$

2. Welche der folgenden Funktionen $u(x,y)$ können Realteil einer holomorphen Funktion $f(z)$ sein? Berechne gegebenenfalls $f(z)$.

   a) $u(x,y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4\,,$
   b) $u(x,y) = \mathrm{e}^{-x^2+y^2}\big(\cos(2xy) - \mathrm{i}\sin(2xy)\big)\,.$

3. Berechne die folgenden Kurvenintegrale:

   a) $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} z^2\,\mathrm{d}z\,,$ $\mathcal{C}$ die geradlinige Verbindung von 1 nach 2+i,
   b) $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \overline{z}\,\mathrm{d}z\,,$ $\mathcal{C}$ der positiv durchlaufene Einheitskreis,
   c) $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \cos z\,\mathrm{d}z\,,$ $\mathcal{C}$ der positiv durchlaufene Kreis mit Radius 4 und Mittelpunkt 1+i.

Maple-Ergänzungen zu den Aufgaben 82 – 84 (Blatt 14, HM II) finden sich unter:
`http://www.mathematik.uni-ulm.de/numerik/forst/hm2.html`