Universität Ulm **Prof. Dr. W. Forst**
Abteilung Mathematik VI (Numerik) **S. Keppeler**

Übungen zu Höhere Mathematik III für Elektrotechniker — Blatt 3

Abgabe am Freitag, den 6.11.1998 um 10:00 Uhr

11. a) Entwickle $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - 4z + 3}$
in eine Potenzreihe um $z_0 = 0$. Welchen Konvergenzradius hat sie? Gib nun eine Reihenentwicklung für $f(z)$ um $z_0 = 0$ an, die bei $\frac{\pi}{2}$ konvergiert.

b) Besitzt $f(z) = \dfrac{\sin(1/z)}{4 + z^2}$
eine Laurententwicklung um $z_0 = 1$, welche bei -1 konvergiert? Beschreibe gegebenenfalls das größtmögliche Ringgebiet, in dem diese Reihe konvergiert.

12. Wo besitzen folgende Funktionen Singularitäten, und von welcher Art sind sie? Entwickle die Funktionen um alle isolierten Singularitäten in Laurentreihen und berechne das Residuum.

a) $f(z) = \dfrac{z}{z^3 - 2z^2 + z}$ b) $f(z) = \dfrac{\ln(1+z)}{z^4}$ c) $f(z) = \dfrac{\mathrm{e}^z}{1-z}$

d) $f(z) = \mathrm{e}^{1/z^2}$ e) $f(z) = \dfrac{\sinh z}{z^4}$

13. Berechne die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int_{|z+1|=2} \frac{\sinh z}{\sin z}\mathrm{d}z$ b) $\displaystyle\int_{|z-\mathrm{i}|=1} \frac{\mathrm{d}z}{(1+z^2)^2}$ c) $\displaystyle\int_{|z-1|=2} \frac{\cos z}{4z^2-\pi^2}\mathrm{d}z$

d) $\displaystyle\int_{|z|=\sqrt{30}} \frac{z^2\cos z}{z-\pi}\mathrm{d}z$ e) $\displaystyle\int_{|z-3|=1} \frac{\mathrm{e}^{2z}}{(1-z)^5(z-3)}\mathrm{d}z$ f) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{\mathrm{e}^{2z}}{(1-z)^5}\mathrm{d}z$

14. Berechne das Integral:

$$\int_C \mathrm{e}^{-z^2}\mathrm{d}z$$

entlang der Parallelen zur reellen Achse, die durch den Punkt $\mathrm{i}\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) verläuft.
Hinweis: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$.

15. Bestimme alle holomorphen Funktionen $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, für die gilt:

a) $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{n^2+1}{n^2}\;, \quad n \in \mathbb{N}$

b) $f\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) = f\left(\dfrac{1}{n} - 1\right) = \dfrac{1}{n}\;, \quad n \in \mathbb{N}$

Aufgabenvorschläge für die Tutorien am 3.11.98

1. Es sei
$$f(z) = \frac{\mathrm{e}^{1/z}}{z^2 - (1+\mathrm{i})z + \mathrm{i}} \, .$$
   a) Bestimme alle Singularitäten von $f(z)$ und klassifiziere sie.
   b) Um welche Singularität läßt sich $f(z)$ so entwickeln, daß die resultierende Laurentreihe sowohl bei $1/2$ als auch bei $\mathrm{i}/2$ konvergiert?

2. Es sei
$$f(z) = \frac{-16}{(z^2 - 4z + 4)(z-6)} \, , \qquad g(z) = \frac{\sinh(1/z)}{z^3 - z^2} \, .$$
   a) Wo besitzen $f(z)$ und $g(z)$ Singularitäten, und von welcher Art sind sie?
   b) Entwickle $f(z)$ um alle isolierten Singularitäten in eine Laurentreihe.
   c) Berechne die Integrale
$$\int_{|z|=1} f(z)\,\mathrm{d}z \, , \qquad \int_{|z-2|=\pi} f(z)\,\mathrm{d}z \, , \qquad \int_{|z-6|=2} f(z)\,\mathrm{d}z \, .$$