Universität Ulm **Prof. Dr. W. Forst**
Abteilung Mathematik VI (Numerik) **S. Keppeler**

Übungen zu Höhere Mathematik III für Elektrotechniker Blatt 4

Abgabe am Freitag, den 13.11.1998 um 10:00 Uhr

16. Berechne die folgenden komplexen Kurvenintegrale.

a) $\displaystyle\int_{|z-i|=1} \frac{z^2}{1+z^4}\,\mathrm{d}z$ b) $\displaystyle\int_{|z-2|=3} \frac{\cos z}{z(z-2)^2}\,\mathrm{d}z$ c) $\displaystyle\int_{|z-1|=\pi} \frac{\mathrm{e}^z}{1-z}\,\mathrm{d}z$

17. Berechne die folgenden reellen Integrale.

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}$ b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x\sin x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

Hinweis: Vielleicht hilft für (b) ein Vergleich mit Maple-Worksheet 12.7 "Berechnung reeller uneigentlicher Integrale", Beispiel 2.

18. a) Es sei $f(z)$ holomorph in $\{z \mid |z-z_0|<\varepsilon\}$ $(\varepsilon>0)$ und besitze in z_0 eine Nullstelle n-ter Ordnung $(n\in\mathbb{N})$. Zeige

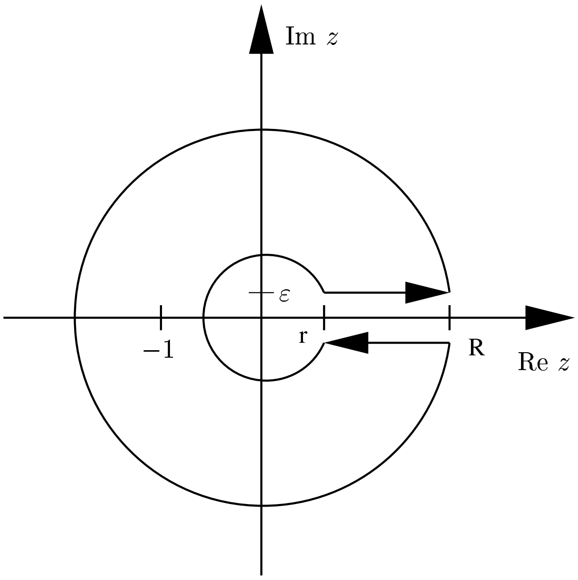
$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} \frac{f'(z)}{f(z)} = n\,.$$

b) Berechne nun: $\displaystyle\int_{|z|=7} \cot z\,\mathrm{d}z\,.$

19. Bestimme eine Möbius-Transformation (d. h. gib auch die entsprechende Matrix an), die die Punkte $z_1=1$, $z_2=2$ und $z_3=0$ auf die Punkte $w_1=0$, $w_2=-\frac{\mathrm{i}}{3}$ und $w_3=\mathrm{i}$ abbildet. Wohin werden durch diese Möbius-Transformation der Punkt $z_0=\mathrm{i}$, die reelle Achse, die imaginäre Achse, der Einheitskreis sowie die obere Halbeben abgebildet? Berechne außerdem die Matrizen der inversen Abbildung und der zweifachen Anwendung der Abbildung.

20. Berechne das Integral

$$\int_0^{\infty} \frac{x^\alpha}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x \quad \text{für } 0<\alpha<1\,.$$



Hinweis:
Definiere die allgemeine Potenz auf $D=\mathbb{C}\setminus\{x\in\mathbb{R}|x\geq 0\}$ durch $z^\alpha := \mathrm{e}^{\alpha\log|z|+\mathrm{i}\alpha\arg z}$, $0<\arg z<2\pi$, berechne das Integral $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \frac{z^\alpha}{z(z+1)}\,\mathrm{d}z$ auf dem nebenstehenden Weg und führe einen geeigneten Limes durch.

Aufgabenvorschläge für die Tutorien am 10.11.98

1. Berechne die folgenden Integrale.

   a) $\displaystyle\int_{|z|=7} \frac{\cos^2 z}{z^2 - 3\pi z + 2\pi^2}\,\mathrm{d}z$ b) $\displaystyle\int_{|z-1|=4} \frac{7z + 4z^2}{(z+2)^2(z-3)}\,\mathrm{d}z$

   c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 - x - 6}{(x^2+4)(x^2+5)}\,\mathrm{d}x$ d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 - x - 6}{(x^2-4)(x^2+5)}\,\mathrm{d}x$

2. Bestimme eine Möbius-Transformation (d. h. gib auch die entsprechende Matrix an), die die Punkte $z_1 = 0$, $z_2 = 1$ und $z_3 = \infty$ auf die Punkte $w_1 = \mathrm{i} - 1$, $w_2 = 0$ und $w_3 = 1 - \mathrm{i}$ abbildet. Wohin werden durch diese Abbildung der Einheitskreis, sein Inneres, sowie die rechte Halbebene abgebildet?