Universität Ulm **Prof. Dr. W. Forst**
Abteilung Mathematik VI (Numerik) **S. Keppeler**

Übungen zu Höhere Mathematik III für Elektrotechniker — Blatt 5

Abgabe am Freitag, den 20.11.1998 um 10:00 Uhr

21. Berechne für die folgenden Funktionen $f(t)$ die Laplacetransformierten $F(s)$ sowie deren Konvergenzabszissen ($a \in \mathbb{C}$, $\omega \in \mathbb{R}$).

a) $f(t) = \mathrm{e}^{at}$
b) $f(t) = \cos^2 \omega t$
c) $f(t) = \cos(\omega t)\sin(\omega t)$
d) $f(t) = t\cos(\omega t)\sin(\omega t)$
e) $f(t) = \displaystyle\int_0^t \tau\cos(\omega\tau)\sin(\omega\tau)\,\mathrm{d}\tau$
f) $f(t) = \displaystyle\int_0^t (t-\tau)\cos(\omega\tau)\sin(\omega\tau)\,\mathrm{d}\tau$

22. Berechne, falls existent, die Funktionen $f(t)$ auf $[0,\infty)$, deren Laplacetransformierte durch $F(s)$ gegeben sind.

a) $F(s) = \dfrac{3}{s+2}$
b) $F(s) = \dfrac{2s+1}{s^3}$
c) $F(s) = s$
d) $F(s) = \dfrac{3}{(s+2)^3}$
e) $F(s) = \dfrac{3}{(s+2)}\mathrm{e}^{-3s}$

23. a) Sei $f(t)$ p-periodisch, d. h. $f(t+p) = f(t)$. Zeige:

$$F(s) = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-ps}} \int_0^p f(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t\,.$$

b) Berechne damit die Laplacetransformierte von

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \le t < \frac{1}{2} \\ -1 & \text{für } \frac{1}{2} \le t < 1 \end{cases}, \quad \text{1-periodisch fortgesetzt.}$$

24. a) Löse das Anfangswertproblem ($\tau > 0$)

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}(t,\tau) - \pi^2 h(t,\tau) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < \tau \\ 1 & \text{für } t \ge \tau \end{cases}, \qquad h(0,\tau) = \frac{\partial h}{\partial t}(0,\tau) = 0.$$

b) Zeige: $\dfrac{\partial h}{\partial t}(t,\tau) = -\dfrac{\partial h}{\partial \tau}(t,\tau)$.

c) Zeige: $y(t) := \displaystyle\int_0^\infty \frac{\partial h}{\partial t}(t,\tau)\,f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ löst das Anfangswertproblem

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}(t) - \pi^2 y(t) = f(t)\,, \qquad y(0) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(0) = 0. \qquad (*)$$

Dabei erfülle die Funktion $f(t)$ die Bedingungen $f(0) = \lim_{t\to\infty} f(t) = 0$.

d) Berechne nun die Lösung des Anfangswertproblems $(*)$ mit

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < T \\ \mathrm{e}^{-t} & \text{für } t \ge T \end{cases}.$$

Aufgabenvorschläge für die Tutorien am 17.11.98

1. Berechne für die folgenden Funktionen $f(t)$ die Laplacetransformierten $F(s)$ sowie deren Konvergenzabszissen ($a \in \mathbb{C}, \ \omega \in \mathbb{R}$).

   a) $f(t) = \mathrm{e}^{-t} \sin t$ b) $f(t) = \mathrm{e}^{3t+2}$

   c) $f(t) = \displaystyle\int_0^t \mathrm{e}^{-t+4\tau+2} \sin(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$

2. Berechne, falls existent, die Funktionen $f(t)$ auf $[0,\infty)$, deren Laplacetransformierte durch $F(s)$ gegeben sind.

   a) $F(s) = \dfrac{1}{(1-s)^5}$ b) $F(s) = \dfrac{1}{s^3 - 4s^2 + 3s}$ c) $F(s) = \dfrac{s^2 - 1}{s^3 - 4s^2 + 3s}$

3. Bestimme die Lösung des folgenden Anfangswertproblems:

$$y''(t) + 3y'(t) = \int_0^t \mathrm{e}^{\tau}(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\,, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$