Universität Ulm **Prof. Dr. W. Forst**
Abteilung Mathematik VI (Numerik) **S. Keppeler**

Übungen zu Höhere Mathematik III für Elektrotechniker Blatt 6

Abgabe am Freitag, den 27.11.1998 um 10:00 Uhr

25. a) Berechne $\widehat{f}(\omega)$ für $f(t) = \begin{cases} 1-|t| & \text{für } t \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.

b) Zeige dann (mit Hilfe der Fourierschen Umkehrformel)

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2\omega}{\omega^2}\cos(2\omega t)\,\mathrm{d}\omega = \begin{cases} 1-|t| & \text{für } t \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

26. Berechne die Fouriertransformierten von

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^{2n+1} \mathrm{e}^{-t^2/2}$ und

b) $t^2\,\mathrm{e}^{-t^2/2}$.

Hinweis: Laut Vorlesung gilt $\mathcal{F}\{\mathrm{e}^{-t^2/2}\}(\omega) = \sqrt{2\pi}\,\mathrm{e}^{-\omega^2/2}$.

27. Löse die folgenden inhomogenen linearen Differentialgleichungen.

a) $y'' - 4y' - 5y = \mathrm{e}^{3x}$ b) $y'' - 4y' - 5y = \mathrm{e}^{-x}$ c) $y'' - 4y' - 5y = \sin x$

28. a) Seien f und g stetig, $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$. Zeige: Die (Bernoullische) Differentialgleichung

$$y' = f(x)\,y + g(x)y^\alpha$$

geht durch den Ansatz $y(x) = [u(x)]^{1/(1-\alpha)}$ über in die lineare Differentialgleichung

$$u' = (1-\alpha)\,f(x)\,u + (1-\alpha)\,g(x)\,.$$

b) Sei f stetig; zeige: Die (homogene) Differentialgleichung

$$y' = f(y/x)$$

läßt sich durch die Transformation $v(x) = \dfrac{y(x)}{x}$ in eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen überführen.

29. a) Bestimme alle Lösungen der folgenden Differentialgleichungen.

(i) $y' = \dfrac{2y}{x} + 2x^3$ (ii) $y' = \sqrt[5]{y^4}$

(iii) $y' = 1 + \dfrac{y}{x}$ (iv) $\log y + \dfrac{xy'}{y} = 0$, $y > 0$

b) Löse die folgenden Anfangswertprobleme.

(i) $y' = \sqrt[5]{y^4}$, $y(x) = 0$ (ii) $y' + 2y = y^2\mathrm{e}^x$, $y(0) = 2$

(iii) $\dfrac{\sin y}{x} + y'\log x\,\cos y = 0$, $y(\mathrm{e}) = \dfrac{\pi}{4}$

Aufgabenvorschläge für die Tutorien am 24.11.98

1. Es sei

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } |t| \le 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

   Berechne $\widehat{f}(\omega)$, $(f * f)(t)$ und $\widehat{f * f}(\omega)$.

2. Berechne die Fouriertransformierte von

$$g(t) = \frac{t}{(1+t^2)^2} .$$

   Hinweis: Laut Vorlesung gilt

$$\mathcal{F}\{\mathrm{e}^{-|t|}\}(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2} .$$

3. Berechne alle Lösungen der folgenden Differentialgleichungen.

   a) $-x^3 y''' + x^2 y'' + 4xy' - 4y = 0$
   b) $y' = 10 - 7y^2$

4. Berechne die Lösung des Anfangswertproblems.

$$y' = -\frac{3}{4x} - \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x}, \; y(1) = 0 .$$

Die Lösungen zu den Aufgaben 17 b) und 20 finden sich unter:
`http://www.mathematik.uni-ulm.de/numerik/forst/hm3.html`