**Universität Ulm** **Prof. Dr. W. Forst**
**Abteilung Mathematik VI (Numerik)** **S. Keppeler**

# Übungen zu Höhere Mathematik III für Elektrotechniker Blatt 7

Abgabe am Freitag, den 4.12.1998 um 10:00 Uhr

30. Es seien die Voraussetzungen von Satz 2.1 der Vorlesung (Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf) erfüllt. Beweisen Sie für die Picard-Iterierten $y_n(x)$ und ihre Grenzfunktion $y(x)$ die Fehlerabschätzung

$$|y(x) - y_n(x)| \leq ML^n \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

für alle $x \in I$ und $n \in I\!N_0$.

31. Bestimmen Sie für das Anfangswertproblem $y' = x^2 - y^2, y(0) = 0$ eine möglichst kleine Rechteckumgebung $R = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-b, b]$ , auf der die Picardsche Iteration definiert ist, und geben Sie eine Lipschitzkonstante L an. Berechnen Sie außerdem auf $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ eine Näherungslösung, die gegenüber der exakten Lösung einen Fehler von höchstens $10^{-3}$ hat.

32. Vorgegeben sei die Anfangswertaufgabe $y' = y + \frac{1}{5}y^2, y(0) = 1$ .

    a) Berechnen Sie die exakte Lösung $y(x)$ und geben Sie deren maximales Existenzintervall an.

    b) Berechnen Sie mit Hilfe von Maple Näherungen $Y(1,h)$ für $y(1)$ mit Hilfe des Euler-Verfahrens (foreuler), des Verfahrens von Heun (heunform) sowie der Runge-Kutta-Verfahren rk3 und rk4 für die Schrittweiten $h = 2^{-N}$ , $N = 1..10$ , und vergleichen Sie deren Genauigkeit, indem Sie jeweils den Ausdruck

    $$\frac{\log\left(\frac{y(1)-Y(1,h)}{y(1)-Y(1,h/2)}\right)}{\log 2}$$

    auswerten. Diese sind Näherungswerte für die (ganzzahlige) Ordnung $p$ dieser Verfahren. Welche Werte erhalten Sie?

    Hinweis:
    Mit dem Maple-Befehl $s := dsolve(\{diff(y(x), x) = y(x) + \frac{1}{5}y(x)^2,\ y(0) = 1\}, y(x),$ $type = numeric, method = classical[< name >], `stepsize` = h);$ läßt sich die Anfangswertaufgabe näherungsweise lösen. Die Anweisung $s(1);$ liefert die Näherung $Y(1,h)$ .

33. Schreiben Sie folgende Systeme von Differentialgleichungen jeweils als Systeme 1. Ordnung:

    a) $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 x_1^2 - \sin(x_1 + x_2), \quad \ddot{x}_2 = \dot{x}_2^2 + \dot{x}_2 + x_1 - \pi$

    b) $y_1'' = 3y_1' - 4y_1 + xy_2 + \sin x, \quad y_2'' = y_2' + x^2 y_2 - y_1' + xy_1 - \cos x$

# Aufgabenvorschläge für die Tutorien am 1.12.98

1. Lösen Sie mittels des Picardschen Iterationsverfahrens

   a) die Anfangswertaufgabe $y' = 2x(1+y), y(0) = 0$ ,
   b) das System $y_1' = x + y_2, y_2' = x + y_1$ mit der Anfangsbedingung $y_1(0) = 2, y_2(0) = -2$ .

2. Zeigen Sie, daß für das System $y_1' = y_1 + y_2, \quad y_2' = y_1 y_2$ mit der Anfangsbedingung $y_1(0) = y_2(0) = 1$ die Voraussetzungen von Satz 4.1 (Satz von Picard-Lindelöf für Systeme) erfüllt sind. Wählen Sie $a = 1$ und $b = 1$ und bestimmen Sie die Größe $M$ sowie eine Lipschitzkonstante $L$ und $\alpha$ .

3. Bestimmen Sie alle stetigen Lösungen der folgenden Integralgleichungen:

   a) $\int_0^x t\, y(t)\, \mathrm{d}t = x^2 + y(x)$,
   b) $y(x) = x^2 + \int_0^x (x-t)\; y(t)\, \mathrm{d}t$ .