Universität Ulm **Prof. Dr. W. Forst**
Abteilung Mathematik VI (Numerik) **S. Keppeler**

Übungen zu Höhere Mathematik III für Elektrotechniker

Blatt 8

Abgabe am Freitag, den 11.12.1998 um 10:00 Uhr

34. Betrachte das folgende Differentialgleichungssystem 1. Ordnung:

$$\dot{\vec{x}} = \vec{B} \times \vec{x}\,, \quad \vec{B} \in \mathbb{R}^3\,.$$

a) Schreibe das System in Matrixform und berechne die Eigenwerte der Koeffizientenmatrix.

b) Berechne für den Fall $\vec{B} = (0, 0, B)^T$ eine Fundamentalmatrix $X(t)$ mit $X(0) = I$ und gib eine Lösung des entsprechenden Anfangswertproblems mit $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$ an.

c) Berechne eine reelle Fundamentalmatrix für den Fall $\vec{B} = (B_1, B_2, 0)^T$ und gib eine Lösung des entsprechenden Anfangswertproblems mit $\vec{x}(0) = (0, 0, z)^T$ an.
Hinweis: Es ist eventuell sinnvoll, in der B_1B_2-Ebene Polarkoordinaten einzuführen.

35. Berechne ein reelles Fundamentalsystem von $y'''(x) - y''(x) + 2y(x) = 0$ sowie – auf zwei unterschiedlichen Wegen – die zugehörige Wronski-Determinante.

36. Betrachte das System

$$\dot{x}_1 = \frac{x_2}{\cos^2 t} + \tan t\,, \quad \dot{x}_2 = x_1 - x_2 \tan t + 1\,, \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\,.$$

a) Bestimme eine Wronskideterminante des Systems.

b) Zeige, daß $x(t) = (\tan t, 1)^T$ das zugehörige homogene System löst und berechne eine Fundamentalmatrix.

c) Berechne diejenige Lösung $x(t)$ des inhomogenen Systems, die $x(0) = (0, 1)^T$ erfüllt.

37. a) Sei $Y(x)$ eine Fundamentalmatrix von $y' = Ay$. Zeige:
$Z(x) := Y^{-1}(x)$ erfüllt die Differentialgleichung $Z' = -ZA$.

b) Berechne eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{t(1+t^2)}x_1 + \frac{t^2}{1+t^2}x_2 + t^2 \sin t\,, \quad \dot{x}_2 = -\frac{1}{t^2(1+t^2)}x_1 - \frac{2t^2+1}{t(1+t^2)}x_2 + \frac{\sin t}{t}\,,$$
$$x_1(1) = x_2(1) = \sin 1\,.$$

Hinweis: $Y(t) := \begin{pmatrix} 1 & -1/t \\ t & t^2 \end{pmatrix}$ ist eine Fundamentalmatrix von

$$\dot{y}_1 = -\frac{1}{t(1+t^2)}y_1 + \frac{1}{t^2(1+t^2)}y_2\,, \quad \dot{y}_2 = -\frac{t^2}{1+t^2}y_1 + \frac{2t^2+1}{t(1+t^2)}y_2\,.$$

Aufgabenvorschläge für die Tutorien am 8.12.98

1. Seien $Y(x)$ bzw. $X(t)$ Fundamentalmatrizen der Systeme

$$y'(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 7 & 3 \\ 3 & 7 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} y(x) \quad \text{und} \quad \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & t^2 \\ 0 & t & 0 \\ t^2 & 0 & -1 \end{pmatrix} x(t)$$

   mit $Y(0) = \pi I$ bzw. $X(0) = 2I$; bereche $\det Y(x)$ und $\det X(t)$.

2. Betrachte das Differentialgleichungssystem

$$\dot{x}_1 = -x_2 \quad \dot{x}_2 = x_1.$$

   a) Zeige, daß $x = (\sin t, -\cos t)^T$ eine Lösung des Systems ist.
   b) Zeige, daß die Wronski-Determinante einer Fundamentalmatrix des Systems gleich 1 gewählt werden kann.
   c) Berechne eine Fundamentalmatrix $X(t)$ des Systems mit $X(0) = I$.
   d) Bestimme die Lösung des Systems mit x(0) = $(1, 2)^T$.

3. Schreibe das Anfangswertproblem

$$y_1'(x) = \frac{y_1 + y_2}{x}, \quad y_2' = \frac{y_1}{x}, \quad y(1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

   auf ein Anfangswertproblem für eine Differentialgleichug zweiter Ordnung um, und löse dieses.