Universität Ulm **Prof. Dr. W. Forst**
Abteilung Mathematik VI (Numerik) **S. Keppeler**

Übungen zu Höhere Mathematik III für Elektrotechniker — Blatt 9

Abgabe am Freitag, den 18.12.1998 um 10:00 Uhr

38. Berechne für

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

jeweils ein Fundamentalsystem von $y' = A_j\, y$ $(j = 1,2,3)$ sowie die Lösung des entsprechenden Anfangswertproblems mit $y(0) = (1,2,3)^T$ $(j = 1,2)$ bzw. $y(0) = (1,1)^T$ $(j = 3)$.

39. Sei A vom Typ $n \times n$ mit n verschiedenen Eigenwerten $\lambda_j \neq 0$ und zugehörigen Eigenvektoren v_j. Zeige:

$$y_j^{\pm} = \mathrm{e}^{\pm\sqrt{\lambda_j}\, x}\, v_j\,, \quad j = 1, ..., n$$

bilden ein Fundamentalsystem von

$$y''(x) = A\, y(x)\,.$$

Gib außerdem ein Fundamentalsytem für den Fall $\lambda_1 = 0$ an.

40. Sei A eine $n \times n$-Matrix.

   a) Zeige: Die Spalten von $\sin(Ax)$ sind Lösungen von $(*)$: $y''(x) + A^2\, y(x) = 0\,.$

   b) Berechne ein Fundamentalsystem von $(*)$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

41. Es sei $X(t) = \mathrm{e}^{At}\, B\, \mathrm{e}^{-At}$ mit beliebigen $n \times n$-Matrizen A und B.

   a) Berechne $\dot{X}(t)$ und gib ein Anfangswertproblem an, das durch $X(t)$ gelöst wird.

   b) Welche Bedingung müssen A und B erfüllen, damit $\dot{X}(t) \equiv 0$ gilt? Wie sieht in diesem Fall $X(t)$ aus?

   c) Bereche $X(t)$ explizit für

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

42. Gib alle reellen Lösungen der folgenden Differentialgleichungen bzw. Anfansgwertprobleme an.

   a) $y'' + 2y = \cos^2(t)\,, \quad y(0) = y'(0) = 0$

   b) $y^{(4)} + 3y^{(3)} + y'' + 3y' = 0\,, \quad y(0) = y''(0) = 1\,,\ y'(0) = y^{(3)}(0) = 0$

   c) $y^{(4)} + 3y^{(3)} + y'' + 3y' = 5$

   d) $\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^2 \left(y'' + 2y + \frac{x^2}{2}\right) = 0$

Aufgabenvorschläge für die Tutorien am 8.12.98

1. Berechne Fundamentalsysteme von $y' = A_j\, y$ $(j = 1, 2)$ mit

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Gib alle reellen Lösungen der folgenden Differentialgleichungen bzw. Anfansgwertprobleme an.

   a) $y' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} y\,, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

   b) $y' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^{x} \end{pmatrix}\,, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

   c) $y' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^{2x} \end{pmatrix}\,, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

   d) $y^{(4)} + 2y'' = 0$

   e) $y^{(4)} + 2y'' = 3$

   f) $y^{(4)} + 2y'' = 3x\,, \quad y(0) = 5\,,\ y'(0) = y^{(3)}(0) = 0\,,\ y''(0) = \frac{3}{2}$