Universität Ulm
Abteilung Mathematik VI (Numerik)

Prof. Dr. W. Forst
S. Keppeler

Übungen zu Höhere Mathematik III für Elektrotechniker

Blatt 10

Abgabe am Freitag, den 8.1.1999 um 10:00 Uhr

43. Betrachte die Differentialgleichung

$$y'' - 2xy' + \lambda y = 0\,, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

   a) Bestimme mittels Potenzreihenansatz ein Fundamentalsystem.

   b) Für welche Werte von λ sind eine oder beide Lösungen Polynome? Gib vier solche Polynome an.

44. Betrachte die Differentialgleichung

$$xy'' + (1-x)y' + \nu y = 0\,, \qquad \nu \in \mathbb{N}_0\,.$$

   a) Zeige: $x = 0$ ist ein regulär singulärer Punkt der Differentialgleichung.

   b) Bestimme mittels des Ansatzes

$$y_\nu = x^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k$$

   eine Lösung der Differentialgleichung. Gib speziell die Lösungen für $\nu = 0, 1, 2$ an.

   c) Zeige, daß die Lösungen aus (b) mit $y(0) = \nu!$ der Rekursionsgleichung

$$y_{\nu+1} + (x - 2\nu - 1)y_\nu + \nu^2 y_{\nu-1} = 0$$

   genügen.
   Hinweis: Es gilt $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k}$

   d) Zeige außerdem, daß

$$y_\nu = \mathrm{e}^x \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^\nu (x^\nu e^{-x})$$

   gilt.

   e) Zeige explizit mit Hilfe der Reduktion der Ordnung, daß

$$\widetilde{y} = y \log x + \sum_k b_k\, x^k$$

   ein guter Ansatz für die zweite linear unabhängige Lösung ist, d. h. setze $\widetilde{y} = y\, z$ und mache für die resultierende Differentialgleichung für z' einen geeigneten Potenzreihenansatz.

Aufgabenvorschläge für die Tutorien am 22.12.98

1. Bestimme mittels eines geeigneten Potenzreihenansatzes die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'' + 2xy' + 2y = 0\,, \quad y(0) = 1\,,\ y'(0) = 0\,.$$

2. Bestimme mittels Potenzreihenansatz Lösungen von

$$x^2y'' + \frac{1}{2}xy' - \left(\frac{3}{2}x + x^2\right)y = 0\,,$$

die in $x = 0$ nicht beliebig oft differenzierbar sind.

Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr!