Universität Ulm **Prof. Dr. W. Forst**
Abteilung Mathematik VI (Numerik) **S. Keppeler**

Übungen zu Höhere Mathematik III für Elektrotechniker

Blatt 11

Abgabe am Freitag, den 15.1.1999 um 10:00 Uhr

45. Untersuche für folgende Matrizen A das zugehörige lineare autonome System $\dot{x} = Ax$ auf Stabilität.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} -4 & -1 & -3 \\ -1 & -3 & -2 \\ -3 & -2 & -5 \end{pmatrix}$

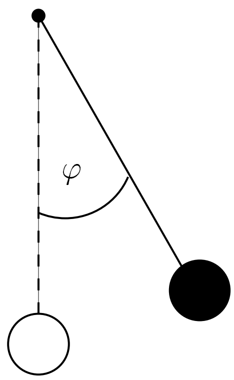
46. Für welche Parameter a, b sind die Lösungen der folgenden Differentialgleichungen asymptotisch stabil?

a) $y''' + ay'' + by' + 2y = 0$
b) $y^{(4)} + ay''' + 4y'' + by' + y = 0$

47. Ein gedämpftes Pendel wird durch die Gleichung

$$\ddot{\varphi} + b\,\dot{\varphi} + \sin\varphi = 0\ , \quad b > 0$$

beschrieben (siehe Abbildung).



a) Schreibe die Differentialgleichung um auf ein System erster Ordnung und bestimme alle stationären Punkte.
b) Klassifiziere die stationären Punkte und skizziere das Phasenportrait in ihrer Umgebung.
c) Skizziere auch das Phasenportrait der Lösungen mit $\varphi(0) = -\pi$, $\dot{\varphi}(0) = 1$ für verschiedene Werte des Dämpfungsparameters b.

48. (Beispiel von L. Markus): Es sei

$$A(t) = \begin{pmatrix} -1 + 3\cos(8t) & 4 - 3\sin(8t) \\ -4 - 3\sin(8t) & -1 - 3\cos(8t) \end{pmatrix}.$$

a) Berechne für $t \in \mathbb{R}$ die Eigenwerte von $A(t)$.
b) Untersuche die Null-Lösung von $\dot{x}(t) = A(t)x$ auf Stabilität. Hinweis: Zeige, daß $x(t) = \mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix} -\cos(4t) \\ \sin(4t) \end{pmatrix}$ eine Lösung ist.

49. Es sei $\dot{x}(t) = A(t)\,x(t)$ für $t \in [t_0, \infty)$. Weiter sei $\lambda(t) \geq \lambda_j(t)$, wobei $\lambda_j(t)$ die Eigenwerte von $B := A + A^T$ sind. Zeige: Falls

$$\lim_{t\to\infty} \int_{t_0}^{t} \lambda(\tau)\,\mathrm{d}\tau = -\infty$$

gilt, dann ist die Null-Lösung von $\dot{x}(t) = A(t)\,x(t)$ asymptotisch stabil.
Hinweis: Betrachte eine Differentialgleichung für $|x(t)|^2$ und schätze die rechte Seite nach oben ab.

Aufgabenvorschläge für die Tutorien am 12.1.99

1. Untersuche für folgende Matrizen A das zugehörige lineare autonome System auf Stabilität.

   a) $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 26 & -3 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

2. Bestimme alle stationären Lösungen der folgenden Differentialgleichungen bzw. Systeme und untersuche sie auf Stabilität.

   a) $\dot{x} = \log \dfrac{y^2 - y - 1}{3}$
   $\dot{y} = x^2 - y^2$

   b) $\dot{x} = \tan(z - x) - 2x$
   $\dot{y} = \sqrt{9 + 12x} - 3e^y$
   $\dot{z} = -4y$

   c) $\dddot{x} = x + \dot{x} + \ddot{x}$

   Zeichne zu (a) auch die Phasenportraits in der Nähe der stationären Punkte.

3. Das logistisches Gesetz (P. F. Verhulst) lautet:

$$\dot{x}(t) = (a - bx)x \text{ mit } a, b > 0\,.$$

   a) Gib alle stationären Lösungen an, und entscheide, ob sie stabil sind.

   b) Berechne die Lösung der logistischen Gleichung mit $x(t_0) = x_0$ für $t \geq t_0$ (denke dabei auch an den Gültigkeitsbereich) und bestimme, falls möglich, $\lim_{t\to\infty} x(t)$.

   c) Skizziere die Lösungen aus (b) für $x_0 < 0$, $0 < x_0 < \frac{a}{b}$ und $x_0 > \frac{a}{b}$.