Universität Ulm **Prof. Dr. W. Forst**
Abteilung Mathematik VI (Numerik) **S. Keppeler**

Übungen zu Höhere Mathematik III für Elektrotechniker

Blatt 12

Abgabe am Freitag, den 23.01.1999 um 10:00 Uhr

50. Es sei $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Ergänze die folgenden Mengen von Teilmengen von Ω jeweils zur kleinstmöglichen Algebra $\mathcal{A}$ über Ω.

    a) $\{\{1\}, \{2, 3, 4, 5\}\}$

    b) $\{\emptyset, \{1, 2\}\}$

    c) $\{A \in \mathcal{P}(\Omega)$ mit $|A| = 2\}$

    d) $\{A \in \mathcal{P}(\Omega)$ mit $|A| = 5\}$

51. Sei $\mathcal{A}$ eine beliebige Menge von Teilmengen von $\Omega \neq \emptyset$. Die kleinste σ-Algebra, die $\mathcal{A}$ enthält, heißt durch $\mathcal{A}$ erzeugte σ-Algebra und wird mit $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ bezeichnet.
    Sei nun $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{A}_1$ die Menge aller offenen Intevalle (a, b) in $\mathbb{R}$ und
    $\mathcal{A}_2$ die Menge aller abgeschlossenen Intervalle $[a, b]$ in $\mathbb{R}$.
    Zeige: $\mathcal{F}(\mathcal{A}_1) = \mathcal{F}(\mathcal{A}_2)$ (die Borel-σ-Algebra über $\mathbb{R}$).

52. Bei einem Pokerspiel (ohne Kartentausch) erhält jeder Spieler 5 Karten. Bestimmme die Wahrscheinlichkeit für ein Full House (drei Gleiche und zwei Gleiche, z. B. drei Könige und zwei Asse) sowie für einen Flush (fünf Karten derselben Farbe – d. h. Kreuz, Pik, Herz oder Karo) sowohl für ein Spiel mit 52 Karten als auch für eines mit 32 Karten.

53. Man bildet aus einer Gruppe von 20 Frauen und 20 Männern zufällig eine Gruppe aus n Personen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Gruppe aus mehr Frauen als Männern besteht für $n = 2, 5, 17, 20, 39, 40$?

54. a) Seien $n \in \mathbb{N}$ und $k_\nu \in \mathbb{N}_0$, $\nu = 1, ..., r$ mit $\sum_{\nu=1}^{r} k_\nu = n$. Zeige, daß es genau

    $$\binom{n}{k_1, ..., k_r} := \frac{n!}{k_1! \cdots k_r!}$$

    Möglichkeiten gibt, n numerierte Kugeln so auf r numerierte Kisten zu verteilen, daß sich in der ν-ten Kiste genau k_ν Kugeln befinden.

    b) Nach dem Verpacken von sechs verschieden Geschenken kann Georg deren Inhalt nicht mehr erkennen. Eines war für Klaus, zwei für Lothar und drei für Susanne. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß bei zufälliger Verteilung der Geschenke (in der richtigen Anzahl!) jeder die richtigen erhält?

Aufgabenvorschläge für die Tutorien am 19.01.99

1. Welche der folgenden $\mathcal{A}$ sind σ-Algebren über Ω?

   a) $\Omega = \{1,2,3\}$, $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1,2\}, \{3\}, \Omega\}$

   b) $\Omega = \{1,2,3,4\}$, $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1,2\}, \{3\}, \Omega\}$

   c) $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{A}$ die Menge aller offenen Intervalle (a,b) in $\mathbb{R}$.

   d) $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \{\emptyset, (a,b), (-\infty, a] \cup [b, \infty), \mathbb{R}\}$ $\quad (a, b \in R$ fest)

2. Wieviele Möglichkeiten gibt es, m Kugeln in einer Reihe anzuordnen, wenn

   a) die Kugeln alle unterscheidbar sind?

   b) jeweils m_j Kugeln die Farbe j haben ($j = 1, 2, ..., r$ und $m_1 + m_2 + ...m_r = m$), Kugeln gleicher Farbe aber ununterscheidbar sind?

3. An einer Tür sind zwei Schlösser, und die Schlüssel dazu sind unter sechs verschiedenen Schlüsseln in einer Tasche. Einer davon geht verloren. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß man die Tür trotzdem noch öffnen kann? Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann man die Türe mit den beiden ersten Schlüsseln öffnen, die man zufällig aus der Tasche zieht?

4. Wieviele aus zwei oder drei Buchstaben bestehende Initialen kann man mit den Buchstaben des Alphabets bilden? Wie groß müßte das Alphabet sein, um eine Million verschiedene dreistellige Initialen zuzulassen?