Universität Ulm **Prof. Dr. W. Forst**
Abteilung Mathematik VI (Numerik) **S. Keppeler**

Formeln aus HM III

trigonometrische und hyperbolische Funktionen: $\cos(\mathrm{i}z) = \cosh z, \quad \sin(\mathrm{i}z) = \mathrm{i}\sinh z$

Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen: $u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$

komplexes Kurvenintegral von $f(z)$ längs C: $$\int_{\mathcal{C}} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f(z(t))\,\dot{z}(t)\,\mathrm{d}t$$

Cauchyscher Integralsatz:
f holomorph im Gebiet G, $\mathcal{C}$ stückweise glatte, geschlossene Kurve in G. Dann gilt:

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)\,\mathrm{d}z = 0\,.$$

Cauchysche Integralformel:
f holomorph im Gebiet G, $\mathcal{C}$ stückweise glatte, positiv orientierte, einfach geschlossene Kurve in G mit $I(\mathcal{C}) \subset G$. Dann gilt für $z \in I(\mathcal{C})$:

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(w)}{(w-z)^{k+1}}\,\mathrm{d}w\,.$$

Koeffizienten der Laurententwicklung: $$a_n = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{|\xi - z_0| = \rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}\xi,\ n \in \mathbb{Z}$$

Residuum von f in z_0: $$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) := a_{-1} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{|z-z_0|=r} f(z)\,\mathrm{d}z$$

Residuensatz: $$\int_C f(z)\,dz = 2\pi\mathrm{i} \sum_{j=1}^n \operatorname*{Res}_{z=z_j} f(z)$$

$P(z)/Q(z)$ gebrochen rational mit Polstellen z_ν in oberer Halbebene:
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{\nu=1}^n \operatorname*{Res}_{z=z_\nu} \frac{P(z)}{Q(z)} \qquad \text{falls existent (!)}$$

Möbiustransformation: $$f(z) = \frac{a_{11}z + a_{12}}{a_{21}z + a_{22}}$$

6-Punkte-Formel: $$\frac{(w-w_1)(w_2-w_3)}{(w-w_3)(w_2-w_1)} = \frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)}$$

Laplacetransformierte von f : $$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} := \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Umkehrformel: $$f(x) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\gamma - \mathrm{i}\infty}^{\gamma + \mathrm{i}\infty} F(s)\,\mathrm{e}^{sx}\,ds$$

... für gebrochen rationale Funktionen $F(s)$ mit den Polstellen $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$: $$f(x) = \sum_{j=1}^m \operatorname*{Res}_{s=\alpha_j} F(s)\mathrm{e}^{sx}$$

Einige Laplace-Transformierte:

$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\}$
$t^n e^{\alpha t}$	$\dfrac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}$
1	$1/s$
$\cos(\omega t)$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin(\omega t)$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\sinh(at)$	$\dfrac{a}{s^2-a^2}$

Rechenregeln (zur Laplacetransformation):

$$\mathcal{L}\{af(t)+bg(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\}$$

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n\mathcal{L}\{f(t)\} - \sum_{k=1}^{n} f^{(k-1)}(0)\, s^{n-k},\ \ n \in \mathbb{N}$$

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\, d\tau\right\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{f(t)\}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right)^n \mathcal{L}\{f(t)\} = (-1)^n\mathcal{L}\{t^n\, f(t)\}\,,\ \ n \in \mathbb{N}$$

$$\int_s^\infty F(u)\, du = \mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}$$

$$\mathcal{L}\{f(t-\tau)\} = e^{-s\tau}\mathcal{L}\{f(t)\}\,,\ \tau > 0\,,\ f(t) := 0\ \text{ für }\ t < 0$$

Faltungssatz: $\mathcal{L}\{(f_1 * f_2)(t)\} := \mathcal{L}\left\{\int_0^t f_1(\tau)\, f_2(t-\tau)\, d\tau\right\} = \mathcal{L}\{f_1(t)\}\cdot\mathcal{L}\{f_2(t)\}$

Fouriertransformierte von f: $\widehat{f}(\omega) := \mathcal{F}\{f(t)\} := \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$

Fouriersche Umkehrformel: $f(x) = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\, e^{i\omega x}\, d\omega$

Eigenschaften, Rechenregeln:

$$\lim_{|\omega|\to\infty} \hat{f}(\omega) = 0\,,\ \text{falls}\quad \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t\ <\ \infty$$

$$\mathcal{F}\{a\, f(t) + b\, g(t)\} = a\,\mathcal{F}\{f(t)\} + b\,\mathcal{F}\{g(t)\}$$

$$\mathcal{F}\left\{\overline{f(t)}\right\} = \overline{\widehat{f}(-\omega)}$$

$$\mathcal{F}\{f(t-\tau)\} = e^{-i\omega\tau}\,\mathcal{F}\{f(t)\}\,,\ \tau \in \mathbb{R}$$

$$\hat{f}(\omega - a) = \mathcal{F}\{e^{iat}\, f(t)\}\,,\ a \in \mathbb{R}$$

$$\mathcal{F}\left\{\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^n f(t)\right\} = (i\omega)^n\,\mathcal{F}\{f(t)\}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\right)^n \widehat{f}(\omega) = (-i)^n\,\mathcal{F}\{t^n\, f(t)\}$$

Faltungssatz: $\mathcal{F}\{(f*g)(t)\} = \mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\,g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\} = \mathcal{F}\{f(t)\}\cdot\mathcal{F}\{g(t)\}$

$$\mathcal{F}\{f(t)g(t)\} = \frac{1}{2\pi}\,(\widehat{f}*\widehat{g})(\omega)$$

Parsevalsche Gleichung: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\,\mathrm{dt} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega$

es gilt auch: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{dt} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)\overline{\widehat{g}(\omega)}\,\mathrm{d}\omega$

spezielle Typen von Differentialgleichungen:

getrennte Veränderliche: $y' = f(x)\cdot g(y)$

exakte Differentialgleichung: $f(x,y) + g(x,y)\cdot y' = 0\,, \quad f_y = g_x$

Riccatische Differentialgleichung: $y' = a(x)\,y + b(x)\,y^2 + c(x)\,, \quad y_0$ löst

$\Longrightarrow$ Substitution $v = \dfrac{1}{y-y_0}$ führt auf lineare DGL für v.

Picard-Iteration: $\displaystyle y_{k+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_k(t))dt$

Variation der Konstanten für $\dot{x} = A(t)x(t) + b(t)$: $\displaystyle x_p(t) = X(t)\left(\int_{t_0}^{t} [X(\tau)]^{-1}\,b(\tau)d\tau\right)$

Exponentialmatrix: $\displaystyle \mathrm{e}^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}A^k$

$$S^{-1}\,A\,S = D := \mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{e}^{tA} = S\,\mathrm{e}^{tD}\,S^{-1}$$

allgemein: Es sei $p(\lambda) := \lambda^m + c_1\lambda^{m-1} + \cdots + c_m$ ein Polynom mit $p(A) = 0$. Ferner seien $\varphi_0,\cdots,\varphi_{m-1}$ die Lösungen folgender Anfangswertaufgaben:

$$y^{(m)}(t) + c_1y^{(m-1)}(t) + \cdots + c_my(t) = 0,$$
$$y^{(j)}(0) = \delta_{\mu,j} \quad (j = 0,\ldots,m-1;\ \mu = 0,\ldots,m-1)$$

Dann gilt $\displaystyle \mathrm{e}^{tA} = \sum_{\mu=0}^{m-1}\varphi_\mu(t)A^\mu\,.$

Das charakteristische Polynom einer linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten habe die Nullstellen $\lambda_1,\ldots,\lambda_r$ mit den Vielfachheiten $k_1,\ldots,k_r$. Dann bilden $\mathrm{e}^{\lambda_1 t}, t\mathrm{e}^{\lambda_1 t},\ldots,t^{k_1-1}\mathrm{e}^{\lambda_1 t},\ldots,\mathrm{e}^{\lambda_r t}, t\mathrm{e}^{\lambda_r t},\ldots,t^{k_r-1}\mathrm{e}^{\lambda_r t}$ ein Fundamentalsystem.

0 heißt regulär singulärer Punkt der Differentialgleichung $x^2y'' + xp(x)y' + q(x)y = 0$, wenn $p(x)$ und $q(x)$ in einer Umgebung von 0 eine Potenzreihenentwicklung besitzen.

Reihenansatz: $y(x) = x^\lambda \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$

Indexgleichung: $\lambda(\lambda-1) + \lambda p_0 + q_0 = 0$

Routh-Hurwitz-Kriterium:
Die Nullstellen des reellen Polynoms $p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0$ besitzen alle negativen Realteil genau dann, wenn gilt:

(i) $a_\nu > 0 \quad (\nu = 0, \cdots, n-1)$ und

(ii) alle Hauptunterdeterminanten von $\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{2n-3} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{n-1} \end{pmatrix}$

(mit $a_n = 1$, $a_m := 0$ für $m > n$) sind positiv.

Ereignisalgebra $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$:
(i) $\Omega \in \mathcal{A}$
(ii) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge von Mengen aus $\mathcal{A} \Rightarrow \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$
(iii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$

Wahrscheinlichkeitsmaß $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$:
(i) $P(A) \geq 0$ für alle $A \in \mathcal{A}$
(ii) $P(\Omega) = 1$
(iii) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge disjunkter Mengen in $\mathcal{A} \Rightarrow P(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n)$

Grundformeln der **Kombinatorik** für Ziehungen aus einer Urne $U = \{1, 2, \cdots, n\}$:
Anzahl der `geordneten` Stichproben vom Umfang r `mit` Wiederholung $= n^r$
Anzahl der `geordneten` Stichproben vom Umfang r `ohne` Wiederholung $= r!\binom{n}{r}$
Anzahl der `ungeordneten` Stichproben vom Umfang r `ohne` Wiederholung $= \binom{n}{r}$
Anzahl der `ungeordneten` Stichproben vom Umfang r `mit` Wiederholung $= \binom{n+r-1}{r}$

bedingte Wahrscheinlichkeit: $\quad P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit: $\quad P(A) = \sum\limits_k P(B_k)P(A|B_k)$

Formel von Bayes: $\quad P(B_k|A) = \dfrac{P(B_k)P(A|B_k)}{\sum_j P(B_j)P(A|B_j)}$

$A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{A}$ stochastisch unabhängig $\Leftrightarrow P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_r}) = P(A_{i_1}) \cdots P(A_{i_r})$ für alle $i_1, \cdots, i_r$ mit $1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n$.

Produkt-WRaum $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ für ein Bernoulli-Experiment mit n-facher Wiederholung:
$\Omega = \{(\omega_1, \cdots, \omega_n) | \omega_j \in \{J, N\}\}$
$P(\{(\omega_1, \cdots, \omega_n)\}) = p^k(1-p)^{n-k}$, wobei k die Anzahl der ω_i mit $\omega_i = J$ ist.

$X : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt Zufallsvariable $\Leftrightarrow (X \leq x) := \{\omega \in \Omega | X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

$F_X : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ mit $F_X(x) := P(X \leq x)$ heißt Verteilungsfunktion der ZV X .

X diskrete ZV, d.h. $W := X(\Omega)$ endlich oder abzählbar: $F_X(x) = \sum\limits_{\substack{k \in W \\ k \leq x}} P(X = k)$.

X ZV mit Dichte f_X : $F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt$

Beispiele für Verteilungen:

hypergeometrische Verteilung: $h(k,r,s,n) := \dfrac{\binom{s}{k}\binom{n-s}{r-k}}{\binom{n}{r}}$

Binomialverteilung: $b(k,r,p) := \begin{pmatrix} r \\ k \end{pmatrix} p^k (1-p)^{r-k}$

Poisson-Verteilung: $P_\lambda(k) := e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$

Exponentialverteilung: $f(t) := \begin{cases} \alpha e^{-\alpha t} & : \ t \geq 0 \\ 0 & : \ t < 0 \end{cases}$

Gaußsche Normalverteilung: $f(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$

analog im höherdimensionalen Fall:

$X = (X_1, \cdots, X_n) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ heißt Zufallsvektor genau dann, wenn gilt:
$(X \leq x) := \{\omega \in \Omega | X_1(\omega) \leq x_1, \cdots, X_n(\omega) \leq x_n\} \in \mathcal{A}$ für alle $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

$F_X : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ mit $F_X(x) := P(X \leq x)$ heißt Verteilungsfunktion des Zufallsvektors X.

$X = (X_1, X_2)$ diskreter Zufallsvektor: $F_X(x_1, x_2) = \sum\limits_{\substack{(y_1,y_2) \in W \\ y_1 \leq x_1, y_2 \leq x_2}} P(X_1 = y_1, X_2 = y_2)$

$X = (X_1, X_2)$ mit Dichte f_X : $F_X(x_1, x_2) = \int\limits_{-\infty}^{x_1} \int\limits_{-\infty}^{x_2} f_X(t_1, t_2)\, dt_1\, dt_2$

$$P(\{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \in D\}) = \iint\limits_D f_X(t_1, t_2)\, dt_1\, dt_2$$

Zufallsvariable $X_1, \cdots, X_n$ heißen stochastisch unabhängig genau dann, wenn gilt:
$(X_1 \leq a_1), \cdots, (X_n \leq a_n)$ stochastisch unabhängig für alle $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$.

Erwartungswert: $\mu_X := E(X) := \sum\limits_{k \in W} k\, P(X = k)$ bzw. $\mu_X := E(X) := \int\limits_{-\infty}^{\infty} t\, f_X(t)\, dt$

Varianz: $\sigma_X^2 := Var(X) := E((X - \mu_X)^2)$

Tschebyscheffsche Ungleichung: $P(|X - \mu| \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}$

Es seien $X_1, \cdots, X_n$ stochastisch unabhängige ZV. Dann gilt
$E(X_1 \cdots X_n) = E(X_1) \cdots E(X_n)$ bzw. $Var(\sum\limits_{j=1}^{n} X_j) = \sum\limits_{j=1}^{n} Var(X_j)$.

Kovarianz: $Cov(X_1, X_2) := E((X_1 - \mu_{X_1})(X_2 - \mu_{X_2}))$