Universität Ulm **Prof. Dr. W. Forst**
Abteilung Mathematik VI (Numerik) **S. Keppeler**

Klausur zu Höhere Mathematik III für Elektrotechniker
Montag, den 25.01.1999, 13 – 15 Uhr

Erlaubte Hilfsmitte: ausgeteilte Formelsammlung (4 Seiten)
Maximale Punktzahl: 94
Benötigte Punktzahl zum Erlangen des Scheins: 42
Bitte jede Aufgabe auf einer **neuen Seite** beginnen und **nicht** mit Bleistift schreiben.

Viel Erfolg!

---

1. Welche der folgenden Funktionen $v(x,y)$, $x,y \in \mathbb{R}$ können Imaginärteil einer in G holomorphen Funktion $f(z)$ sein? Gib in diesen Fällen $f(z)$ explizit an.

   (a) $v(x,y) = x^3y - xy^3\,,\ G = \mathbb{C}$ (b) $v(x,y) = \dfrac{-y}{x^2+y^2}\,,\ G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

   (3+4)

2. Es seien
$$f(z) = \frac{\log(2+z)}{2z+z^2}\,, \quad g(z) = \frac{z^2+2z+1}{z^4+3z^3+2z^2} \quad \text{und} \quad h(z) = z^3\,\mathrm{e}^{1/z^2}\,.$$

   (a) Bestimme das Holomorphiegebiet der drei Funktionen und klassifiziere alle ihre isolierten Singularitäten.

   (b) Entwickle $h(z)$ um $z_0 = 0$ in eine Laurentreihe und bestimme dort das Residuum.

   (c) Berechne $\operatorname*{Res}_{z=0} g(z)$ und $\displaystyle\oint_{|z-1|=2} f(z)\,\mathrm{d}z$.

   (6+2+4)

3. (a) Entwickle die Funktion $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$ in eine Potenzreihe um $z_0 = 0$.
   Welchen Konvergenzradius hat diese Reihe?

   (b) Entwickle $f(z)$ auch in eine Laurentreihe um $z_1 = \mathrm{i}$, die bei $z_0 = 0$ konvergiert. In welchem Gebiet konvergiert diese Reihe?
   Hinweis: Partialbruchzerlegung ist hilfreich.

   (3+5)

4. Berechne, falls existent, folgende Integrale:

   (a) $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{\mathrm{e}^{2z}}{(1-z)^5}\,\mathrm{d}z$ (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+x+1}{(x^2+2)(x^2+3)}\,\mathrm{d}x$

   (4+4)

5. Berechne, falls existent, die Funktion $f(t)$ auf $[0,\infty)$, deren Laplacetransformierte durch $F(s)$ gegeben ist.

   (a) $F(s) = \dfrac{3s+1}{2s^3}$ (b) $F(s) = \dfrac{\mathrm{e}^{-s}}{s+2}$

   (3+4)

6. Berechne die Fouriertransformierten der folgenden Funktionen.

(a) $f(t) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu)!} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^{2\nu} \mathrm{e}^{-t^2/2}$ (b) $f(t) = (t-2)\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}+2t-2}$

HINWEIS: $\mathcal{F}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-t^2/2}\right\}(\omega) = \mathrm{e}^{-\omega^2/2}$

(4+5)

7. Berechne die Lösung der folgenden Anfangswertprobleme.

(a) $y^2 + \dfrac{1}{1+x^2} + 2(1+x)y\,y' = 0, \quad y(0) = 1$

(b) $y'' + 2y' + 2y = \mathrm{e}^{-x}, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$

(c) $y'' + 4y = \sin(2x), \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0$

(d) $y'' + 2y = \cos^2 x, \quad y(0) = y'(0) = 0$

(4+4+4+4)

8. Es seien

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & -4 & -2 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechne $\mathrm{e}^{A_1 t}$.

(b) Bestimme die Lösung von $\dot{x} = A_1 x$, $x(0) = (1,2)^T$.

(c) Bestimme eine Fundamentalmatrix von $\dot{x} = A_2 x$.

(d) Untersuche die Differentialgleichungssysteme $\dot{x} = A_j x$, $j = 1,2$ auf Stabilität bzw. asymptotische Stabilität.

(4+2+4+3)

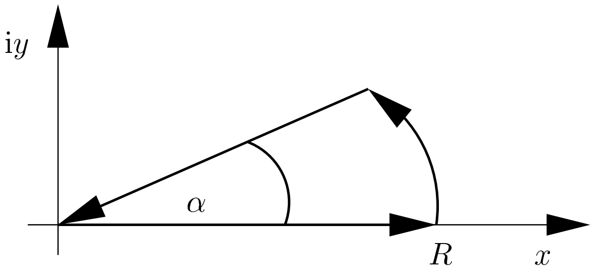
9. Untersuche das Polynom $p(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^3 + 4\lambda^2 + 4\lambda + 2$ auf Stabilität.

(4)

*10. Berechne das Integral

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x\,,\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 2\,.$$

HINWEIS: Integration auf dem abgebildeten Weg mit $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ und anschließendem Grenzübergang $R \to \infty$ ist hilfreich.



(10)