Universität Ulm **Prof. Dr. W. Forst**
Abteilung Mathematik VI (Numerik) **S. Keppeler**

Übungen zu Höhere Mathematik III für Elektrotechniker

Lösungen für die Aufgaben 17 b) und 20

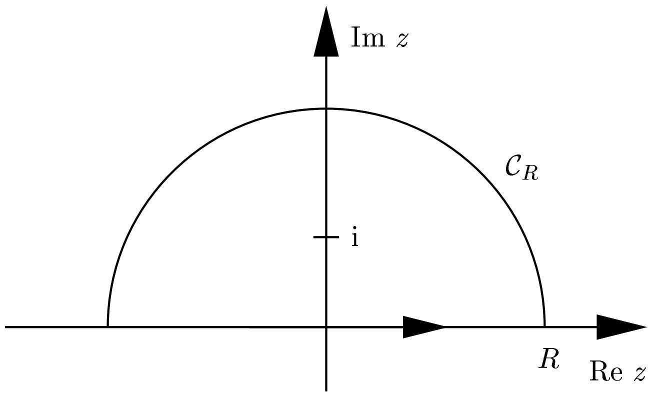
17. Berechne die folgenden reellen Integrale.

b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\sin x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

LÖSUNG: Integriere die Funktion

$$\frac{z\mathrm{e}^{iz}}{1+z^2}$$

auf dem nebenstehenden Weg. Der Residuensatz liefert dann:



$$\underbrace{2\pi\mathrm{i}\,\operatorname*{Res}_{z=\mathrm{i}}\frac{z\mathrm{e}^{iz}}{1+z^2}}_{=:A} = \underbrace{\int_{\mathcal{C}_R}\frac{z\mathrm{e}^{iz}}{1+z^2}\mathrm{d}z}_{=:I_2} + \underbrace{\int_{-R}^{R}\frac{x\mathrm{e}^{ix}}{1+x^2}\mathrm{d}x}_{=:I_1}\,.$$

Im einzelnen gilt: $A = 2\pi\mathrm{i}\dfrac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{-1}}{2\mathrm{i}} = \dfrac{\mathrm{i}\pi}{\mathrm{e}}$,

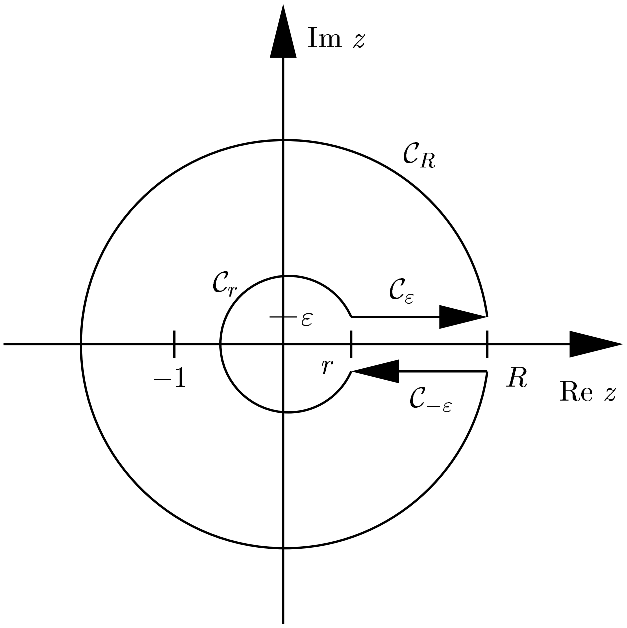
$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{-R}^{0}\frac{t\mathrm{e}^{it}}{1+t^2}\mathrm{d}t + \int_0^R\frac{x\mathrm{e}^{ix}}{1+x^2}\mathrm{d}x \underset{t=-x}{=} -\int_0^R\frac{x\mathrm{e}^{-ix}}{1+x^2}\mathrm{d}x + \int_0^R\frac{x\mathrm{e}^{ix}}{1+x^2}\mathrm{d}x \\
&= 2\mathrm{i}\int_0^R\frac{x\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 2\mathrm{i}\int_0^\infty\frac{x\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x \\
|I_2| &= \left|\int_0^\pi\frac{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{e}^{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}}{1+R^2\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}}\mathrm{i}R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t\right| \le \int_0^\pi\frac{R^2\,\mathrm{e}^{-R\sin t}}{\sqrt{(1+R^2\cos(2t))^2+R^4\sin(2t)}}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\pi\frac{R^2\mathrm{e}^{-R\sin t}}{\sqrt{1+R^4+2R^2\cos(2t)}}\,\mathrm{d}t \le \frac{R^2}{|R^2-1|}\int_0^\pi\mathrm{e}^{-R\sin t}\,\mathrm{d}t \\
&= 2\frac{R^2}{|R^2-1|}\int_0^{\pi/2}\mathrm{e}^{-R\sin t}\,\mathrm{d}t \underset{(*)}{\le} 2\frac{R^2}{|R^2-1|}\int_0^{\pi/2}\mathrm{e}^{-2Rt/\pi}\,\mathrm{d}t \\
&= 2\frac{R^2}{|R^2-1|}\frac{\mathrm{e}^{-R}-1}{(-R)} \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0\,,
\end{aligned}$$

wobei $(*) : \sin t \ge \frac{2}{\pi}t$ für $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$ verwendet wurde. Im Limes $R\to\infty$ folgt insgesamt

$$\int_0^\infty\frac{x\sin x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2\mathrm{e}}\,.$$

20. Berechne das Integral

$$\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x \quad \text{für } 0<\alpha<1\,.$$



<u>Hinweis:</u>
Definiere die allgemeine Potenz auf $D=\mathbb{C}\setminus\{x\in\mathbb{R}|x\geq 0\}$ durch $z^\alpha := \mathrm{e}^{\alpha\log|z|+\mathrm{i}\alpha\arg z}$, $0<\arg z<2\pi$, berechne das Integral $\int_{\mathcal{C}} \frac{z^\alpha}{z(z+1)}\,\mathrm{d}z$ auf dem nebenstehenden Weg und führe einen geeigneten Limes durch.

Lösung: $f(z) := \dfrac{z^\alpha}{z(z+1)}$. Der Residuensatz liefert:

$$2\pi\mathrm{i}\operatorname*{Res}_{z=-1} f(z) = \int_{\mathcal{C}_R} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\mathcal{C}_r} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\mathcal{C}_\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\mathcal{C}_{-\varepsilon}} f(z)\,\mathrm{d}z\,.$$

Mit obiger Definition von z^α gilt: $\operatorname*{Res}_{z=-1} f(z) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\alpha}}{(-1)}$,

$$\left|\int_{\mathcal{C}_R} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq 2\pi R \max_{0\leq t\leq 2\pi}\left|\frac{\mathrm{e}^{\alpha\log R+\mathrm{i}\alpha t}}{R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}(R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+1)}\right| = 2\pi R \max_{0\leq t\leq 2\pi}\frac{R^\alpha}{R\sqrt{(1+R\cos t)^2+R^2\sin^2 t}}$$

$$= 2\pi \max_{0\leq t\leq 2\pi}\frac{R^\alpha}{\sqrt{1+R^2+2R\cos t}} = 2\pi\frac{R^\alpha}{|R-1|} \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0\,,$$

analog:

$$\left|\int_{\mathcal{C}_r} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq 2\pi\frac{r^\alpha}{|r-1|} \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0\,.$$

Weiter gilt wegen obiger Definition von z^α:

$$\int_{\mathcal{C}_\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}z \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \int_r^R \frac{x^\alpha}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x\,,$$

$$\int_{\mathcal{C}_{-\varepsilon}} f(z)\,\mathrm{d}z \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \int_R^r \frac{\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\alpha}\,x^\alpha}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\alpha}\int_r^R \frac{x^\alpha}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x\,.$$

D. h. im kombinierten Limes $\varepsilon\to 0$, $r\to 0$ und $R\to\infty$ erhält man:

$$-2\pi\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\alpha} = \left(1-\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\alpha}\right)\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x \quad\Longrightarrow$$

$$\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\alpha}}{\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\alpha}-1} = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}\,.$$