Universität Ulm **Prof. Dr. W. Forst**
Abteilung Mathematik VI (Numerik) **S. Keppeler**

Übungen zu Höhere Mathematik III für Elektrotechniker

Lösung zu den Aufgaben 44 c) und e)

44. Betrachte die Differentialgleichung

$$xy'' + (1-x)y' + \nu y = 0\,, \qquad \nu \in \mathbb{N}_0\,.$$

c) Zeige, daß die Lösungen aus (b) mit $y(0) = \nu!$ der Rekursionsgleichung

$$y_{\nu+1} + (x - 2\nu - 1)y_\nu + \nu^2 y_{\nu-1} = 0$$

genügen.

Hinweis (Fehler auf dem Übungsblatt!): Es gilt $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

LÖSUNG:

$$\begin{aligned}
y_{\nu+1} &\underset{\text{(d)}}{=} \mathrm{e}^x \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{\nu+1} \left(x^{\nu+1}\,\mathrm{e}^{-x}\right) \\
&= \mathrm{e}^x \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{\nu} \left((\nu+1)\,x^\nu\,\mathrm{e}^{-x} - x^{\nu+1}\,\mathrm{e}^{-x}\right) \\
&= (\nu+1)y_\nu - \mathrm{e}^x \sum_{\mu=0}^{\nu} \binom{\nu}{\mu} \left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{\mu} x\right] \left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{\nu-\mu} x^\nu\,\mathrm{e}^{-x}\right] && \text{(Leibniz)} \\
&= (\nu+1)\,y_\nu - \mathrm{e}^x\,x \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{\nu} \left(x^\nu\,\mathrm{e}^{-x}\right) - \mathrm{e}^x \nu \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{\nu-1} \left(x^\nu\,\mathrm{e}^{-x}\right) \\
&= (\nu+1-x)\,y_\nu - \nu\,\mathrm{e}^x \sum_{\mu=0}^{\nu-1} \binom{\nu-1}{\mu} (-1)^\mu\,\mathrm{e}^{-x} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{\nu-1-\mu} x^\nu && \text{(Leibniz)} \\
&= (\nu+1-x)\,y_\nu - \nu \sum_{\mu=0}^{\nu-1} \binom{\nu-1}{\mu} (-1)^\mu\,x^{\mu+1}\,\nu(\nu-1)\cdots(\mu+2) \\
&= (\nu+1-x)\,y_\nu - \nu \sum_{\mu=0}^{\nu-1} \binom{\nu-1}{\mu} (-1)^\mu\,x^{\mu+1}\,\frac{\nu!}{(\mu+1)!} \\
&= (\nu+1-x)\,y_\nu + \nu \sum_{\mu=1}^{\nu} \binom{\nu-1}{\mu-1} (-1)^\mu\,x^{\mu}\,\frac{\nu!}{\mu!} \\
&\qquad\qquad \left[\text{verwende: } \binom{\nu-1}{\mu-1} = \binom{\nu}{\mu} - \binom{\nu-1}{\mu}\right] \\
&= (\nu+1-x)\,y_\nu + \nu \sum_{\mu=1}^{\nu} \binom{\nu}{\mu} (-1)^\mu\,x^{\mu}\,\frac{\nu!}{\mu!} - \nu \sum_{\mu=1}^{\cancel{\nu}\,\nu-1} \binom{\nu-1}{\mu} (-1)^\mu\,x^{\mu}\,\frac{\nu!}{\mu!} \\
&= (\nu+1-x)\,y_\nu + \nu\,(y_\nu - \nu!) - \nu^2\,\left(y_{\nu-1} - (\nu-1)!\right) \\
&= (2\nu+1-x)\,y_\nu - \nu^2\,y_{\nu-1}
\end{aligned}$$

□

e) Zeige explizit mit Hilfe der Reduktion der Ordnung, daß

$$\widetilde{y} = y \log x + \sum_k b_k \, x^k$$

ein guter Ansatz für die zweite linear unabhängige Lösung ist, d. h. setze $\widetilde{y} = y\,z$ und mache für die resultierende Differentialgleichung für z' einen geeigneten Potenzreihenansatz.

LÖSUNG:

Setze $\widetilde{y} = y\,z$ in die Differentialgleichung ein:

$$x(\underline{y''}z + 2y'z' + yz'') + (1-x)(\underline{y'z} + yz') + \underline{\nu yz} = 0\,.$$

Da y selbst die Differentialgleichung erfüllt, heben sich die unterstrichenen Terme heraus, und man erhält für $u = z'$ eine Differentialgleichung erster Ordnung (daher "Reduktion der Ordnung"):

$$xu' + 2x\frac{y'}{y}u + (1-x)u = 0\,.$$

Da $y(0) \neq 0$ ist $x_0 = 0$ ein regulär singulärer Punkt dieser Differentialgleichung, d. h. wir können für u den Ansatz

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \, x^{k+\lambda}$$

machen. Die Indexgleichung ("x^λ-Koeffizient $= 0$") lautet:

$$\lambda c_0 + c_0 = 0 \quad \underset{c_0\neq 0}{\Longrightarrow} \quad \lambda = -1\,.$$

Damit gilt für z', z und $\widetilde{y}$:

$$\begin{aligned}
z' &= u = \frac{c_0}{x} + \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+1}\, x^k\,, \\
z &= c_0 \log x + \sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{c}_k \, x^k \qquad\qquad (\text{setze } c_0{=}1)\,, \\
\widetilde{y} &= y\,z = y \log x + \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k\,,
\end{aligned}$$

d. h. $\widetilde{y}$ hat die angegebene Form.