Universität Ulm **Prof. Dr. W. Forst**
Abteilung Mathematik VI (Numerik) **S. Keppeler**

Vordiplomsprüfung Höhere Mathematik III für Elektrotechniker

Freitag, den 26.02.1999

Erlaubte Hilfsmitte: ausgeteilte Formelsammlung (13 Seiten)
Maximale Punktzahl: 123
Hinreichend zum Bestehen der Prüfung (Note 4,0): 50 Punkte
Bitte jede Aufgabe auf einer **neuen Seite** beginnen und **nicht** mit Bleistift schreiben!

Viel Erfolg!

---

1. Welche der folgenden Funktionen $v(x,y)$, $x, y \in \mathbb{R}$ können Imaginärteil einer in G holomorphen Funktion $f(z)$ sein? Gib in diesen Fällen $f(z)$ explizit an.

   (a) $v(x,y) = -\sin x \, \sinh y \, , \; G = \mathbb{C}$ (b) $v(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2} \, , \; G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

   (4+3)

2. Sei f die Abbildung $f : z \mapsto w = \sinh z$. Bestimme die Bilder der folgenden Geraden:

   (a) $\operatorname{Re} z = 1$ (b) $\operatorname{Im} z = -\dfrac{\pi}{2}$

   (3+3)

3. Es seien

   $$f(z) = \frac{1}{e^{1/z} - 1} \, , \quad g(z) = \frac{(z-4)\sin z}{z^4 - 4z^3 + 4z^2} \quad \text{und} \quad h(z) = \frac{\log(4 - z^2)}{z} \, .$$

   (a) Bestimme das Holomorphiegebiet der drei Funktionen und klassifiziere alle ihre isolierten Singularitäten.
   (b) **Kann** $h(z)$ um $z_0 = 0$ in eine Laurentreihe entwickelt werden? Wie lauten gegebenenfalls deren Konvergenzradien?
   (c) Berechne $\operatorname*{Res}_{z=0} h(z)$ und $\displaystyle\oint_{|z-1|=2} g(z) \, dz$.

   (8+2+4)

4. Berechne, falls existent, folgende Integrale:

   (a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2+4}{(x^2+1)(x^2+9)} \, dx$ (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2+x+1}{(x^2-2)(x^2+3)} \, dx$

   (4+2)

5. Berechne, falls existent, die Funktion $f(t)$ auf $[0, \infty)$, deren Laplacetransformierte durch $F(s)$ gegeben ist.

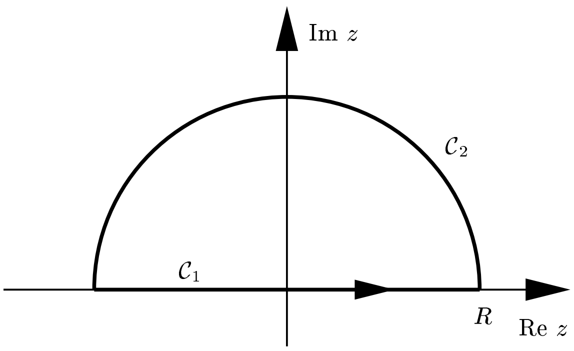
   (a) $F(s) = \dfrac{s+1}{s-1}$ (b) $F(s) = \dfrac{2}{(s^2+4)^2}$ (c) $F(s) = \dfrac{1}{s^2} \cdot \dfrac{s}{s^2+1}$

   (2+4+4)

6. Berechne das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 - 2x + 2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Hinweis: Integriere dazu $\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z^2 - 2z + 2}$ auf dem nebenstehenden Weg und führe einen geeigneten Grenzübergang durch.



(8)

7. Bestimme alle Lösungen der folgenden Differentialgleichungen.

(a) $y''' - 2y' = \mathrm{e}^{-x}$ (b) $y''' - 2y' = \sin x$ (c) $y''' - 2y' = 5$

(4+4+4)

8. Betrachte das Anfangswertproblem $y' = y + 2xy$, $y(0) = 1$.

   (a) Gib die Picard-Iterierten $y_0(x)$, $y_1(x)$ und $y_2(x)$ an.
   (b) Berechne die exakte Lösung des Anfangswertproblems.
   (c) Entwickle die exakte Lösung um $x_0 = 0$ bis auf Terme der Ordnung x^3 (d. h. bis zum x^2-Term).

(4+4+4)

9. Berechne die Lösung des Anfangswertproblems

$$\ddot{x} + 4x = \begin{cases} \sin(2t) & , \; 0 < t < \pi \\ 0 & , \; t > \pi \end{cases}, \qquad x(0) = \dot{x}(0) = 0\,.$$

Hinweis: Vergleiche auch mit Aufgabe 5b. (8)

10. Betrachte das Differentialgleichungssystem $\dot{x} = Ax$ mit $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

   (a) Berechne e^{At}. Hinweis: Zeige zunächst $A^n = (-1)^n \begin{pmatrix} (-a)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   (b) Bestimme die Lösung des Systems, die $x(0) = (1, 0, 2)^{\mathrm{T}}$ erfüllt.
   (c) Für welche Werte von a ist das System stabil bzw. asymptotisch stabil?

(5+2+2)

11. In einer Fabrik werden Schrauben hergestellt. 2% der Schrauben sind fehlerhaft. An einer Prüfstation werden 95% der fehlerhaften Schrauben als solche erkannt und aussortiert. Es wird jedoch auch 1% der intakten Schrauben aussortiert.

    (a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird eine Schraube aussortiert?

    (b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine aussortierte Schraube fehlerfrei, d. h. wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine Schraube fehlerfrei ist, unter der Bedingung, daß sie aussortiert wurde.

    (c) Man kauft billig 10 der aussortierten Schrauben. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß sich darunter genau 4 fehlerfreie Schrauben befinden?

(2+3+3)

12. Sei $\mathcal{A}$ eine beliebige Menge von Teilmengen von $\Omega \neq \emptyset$. Die kleinste σ-Algebra, die $\mathcal{A}$ enthält, heißt durch $\mathcal{A}$ erzeugte σ-Algebra und wird mit $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ bezeichnet.

    (a) Sei $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{A}_1$ die Menge aller offenen Intervalle der Form $(-\infty, a)$ in $\mathbb{R}$ und $\mathcal{A}_2$ die Menge aller offenen Intervalle (a, b) in $\mathbb{R}$.
    Zeige: $\mathcal{F}(\mathcal{A}_1) \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{A}_2)$ (die Borel-σ-Algebra über $\mathbb{R}$).

    (b) Sei $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{A}_1 = \{\{2\}, \{3\}\}$ und $\mathcal{A}_2 = \{A \in \mathcal{P}(\Omega) \text{mit} |A| = 2\}$.
    Bestimme $\mathcal{F}(\mathcal{A}_1)$ und $\mathcal{F}(\mathcal{A}_2)$.

(5+5)

13. Der Zufallsvektor (X, Y) besitze die Verteilungsdichte

$$f_{XY}(x, y) = N \begin{cases} \dfrac{1}{1 + x^2} & 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

    (a) Bestimme N.

    (b) Bestimme die Randdichten und die Randverteilungen für X und Y.

    (c) Berechne $\mathrm{E}(Y)$ und $\mathrm{Var}(Y)$.

    (d) Berechne $P(X + Y \leq 5)$.

(2+3+4+4)