1. Klausur zu Lineare Algebra für Informatiker

Montag, 18.12.2000, 18–20 Uhr

<u>Hilfsmittel:</u> Ihr vorbereitetes Blatt <u>Zeit:</u> 2 Stunden

Es sind maximal 109 Punkte erreichbar. – 100 Punkte = 100%.

Bitte <u>nicht mit Bleistift schreiben</u> und jede Aufgabe auf einer neuen Seite bearbeiten.

Weiteres Papier ist jederzeit verfügbar.

Viel Erfolg !

---

1. Gegeben seien im $\mathbb{R}^3$ die Punkte
$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} , \quad P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \quad P_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} .$$
Bestimmen Sie
   (a) eine Parameterdarstellung der durch P_1 bis P_3 aufgespannten Ebene E ,
   (b) die Hesse Normalform dieser Ebene,
   (c) den Abstand der Ebene E zum Punkt $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. (6+10+5)

2. Es seien $\pi = (2,3,4,7,6,1,5)$ und $\sigma = (1,2,3,6,7,4,5) \in S_7$.
   (a) Stellen Sie π und σ als Produkt disjunkter Zykel dar.
   (b) Berechnen Sie $\operatorname{sign} \pi$, $\operatorname{sign} \sigma$.
   (c) Bestimmen Sie $\pi \circ \sigma$, $\sigma^{-1} \circ \pi^{-1}$. (4+4+4)

3. (a) Zeigen Sie, daß $A_n = \{\pi \in S_n \, , \, \operatorname{sign} \pi = 1\}$ eine Untergruppe von S_n ist.
   (b) Bestimmen Sie die Anzahl der Elemente von A_n .
   (Zeigen Sie zunächst, daß jedes $\pi \in S_n \setminus A_n$ in der Form $\pi = \sigma \circ (12)$ mit $\sigma \in A_n$ darstellbar ist.) (4+8)

4. Welche der folgenden Mengen sind Vektorräume über $\mathbb{R}$? Bestimmen Sie ggf. die Dimension.
   (a) $T = \{x \in \mathbb{R}^n \, ; \, 8x_1 - x_2 + x_3 = 0 \, , \, x_1 + x_2 + x_3 = x_4 \, , \, n \geq 4\}$
   (b) $T = \{x \in \mathbb{R}^n \, ; \, (x_1 - x_2)(x_1 - x_3) = 0 \, , \, n \geq 3\}$
   (c) $T = \{A \in \mathbb{R}^{4,4} \, ; \, A = (a_{ij}) \text{ mit } \sum_{i=1}^{4} a_{ii} = 0\}$ (8+5+6)

   (Zur Erinnerung: $\mathbb{R}^{4,4}$: reelle $4,4$ Matrizen mit der üblichen Addition und Skalarmultiplikation.)

5. Im $\mathbb{R}^3$ seien die Unterräume
$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle \text{ und } V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \text{ gegeben.}$$
Bestimmen Sie
   (a) $\dim U$ und $\dim V$,
   (b) eine Basis von $U \cap V$. (4+10)

6. (a) Es sei $B \in \mathbb{R}^{n,m}$ beliebig und A eine reguläre n,n Matrix.
   Zeigen Sie: Es gibt genau eine Matrix X mit $AX = B$.
   (b) Bestimmen Sie A^{-1} für $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (c) Berechnen Sie alle Lösungen des Gleichungssystems $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   (5+10+4)

7. (a) Eine Matrix B heißt symmetrisch, falls $B = B^T$ gilt.
   Zeigen Sie: $A \cdot A^T$ ist symmetrisch.
   (b) Es sei konkret $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
   Berechnen Sie AA^T und die Ränge von A und AA^T . (4+4+4)