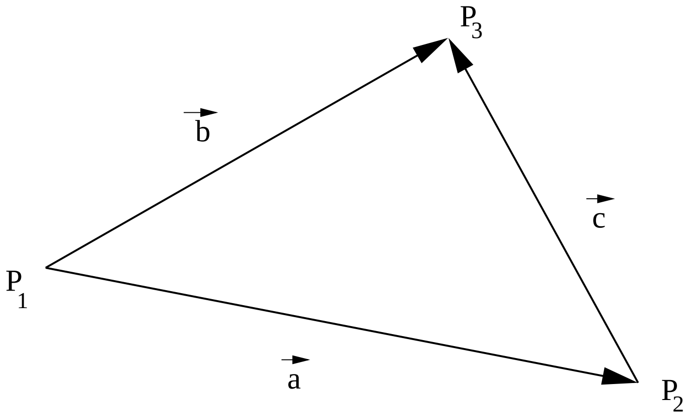
Lösung der ersten Klausur
zu Lineare Algebra für Informatiker WS00/01 vom 18.12.00

1.



(a) Richtungsvektoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 3-2 \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \,, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ -1-2 \\ 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \,.$$

Parameterdarstellung der Ebene:

$$E = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \,,\ t, s \in \mathbb{R} \right\} .$$

(b) Normalenvektor:

$$\vec{n} := \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} \,,$$

normiert (z.B.):

$$\vec{n}_0 := -\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{83}} \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \,.$$

Hesse Normalform der Ebene:

$$\vec{n}_0 \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = 0$$

bzw.

$$\vec{n}_0 \, \vec{x} - \frac{28}{\sqrt{83}} = 0 \,.$$

(c) Abstand d des Punktes $(1, 1, 1)^T$ von E:

$$d = \left| \vec{n}_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{28}{\sqrt{83}} \right| = \frac{13}{\sqrt{83}} \,.$$

2. (a) $\pi = (1\,2\,3\,4\,7\,5\,6)$
$\sigma = (4\,6) \circ (5\,7)$

(b) $\mathrm{sign}(\pi) = (-1)^6 = 1$
$\mathrm{sign}(\sigma) = (-1)(-1) = 1$

(c) $\pi \circ \sigma = (1\,2\,3\,4\,7\,5\,6) \circ (4\,6) \circ (5\,7) = (1\,2\,3\,4) \circ (6\,7)$
$\sigma^{-1} \circ \pi^{-1} = (\pi \circ \sigma)^{-1} = (1\,4\,3\,2) \circ (6\,7)$

3. (a) $\pi \in A_n$ und $\sigma \in A_n \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{sign}(\pi \circ \sigma) = \operatorname{sign}\pi \cdot \operatorname{sign}\sigma = 1$,
d.h. $\pi \circ \sigma \in A_n \quad \square$

(b) Zu jedem $\pi \in S_n$ existiert **genau** ein $\sigma \in S_n$ mit
$\pi = \sigma \circ (1\,2)$, denn $\sigma = \pi \circ (1\,2)^{-1} = \pi \circ (1\,2)$. $\quad (*)$
Wegen $\operatorname{sign}\pi = \operatorname{sign}\sigma \cdot \operatorname{sign}(1\,2) = -\operatorname{sign}\sigma$ gilt entweder
$\pi \in A_n$ oder $\sigma \in A_n$. $\quad (**)$
D.h. laut $(*)$ und $(**)$ existiert zu jedem $\pi \in A_n$ **genau** ein $\sigma \in S_n \setminus A_n$ und umgekehrt

$$\Longrightarrow \quad |A_n| = \frac{|S_n|}{2} = \frac{n!}{2}\,.$$

4. (a) T ist Unterraum, da Lösungsmenge des homogenen, linearen Gleichungssystems $A\tilde{x} = 0$, wobei $\tilde{x} \in \mathbb{R}^4$, der Vektor der ersten vier Einträge eines Vektors $x \in \mathbb{R}^n$ ist, und

$$A := \begin{pmatrix} 8 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$\Longrightarrow \quad \dim T = n - \operatorname{rg} A = n - 2.$

(b) T ist kein Vektorraum, da z.B. (für $n = 3$)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in T$$

aber

$$x := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin T,$$

denn $(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) = (2-1)(2-1) = 1 \neq 0.$

(c) T ist Unterraum des $\mathbb{R}^{4,4}$ ($\dim \mathbb{R}^{4,4} = 16$), da Lösungsmenge eines homogenen, linearen Gleichungssystems (mit einer Gleichung);
$A, B \in T \quad \Longrightarrow \quad C := \lambda A + \mu B \in T$ $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$, denn

$$\sum_{i=1}^{4} c_{ii} = \sum_{i=1}^{4} (\lambda a_{ii} + \mu b_{ii}) = \lambda \sum_{i=1}^{4} a_{ii} + \mu \sum_{i=1}^{4} b_{ii} = 0 + 0 = 0.$$

Weiter gilt: $\dim T = 16 - 1 = 15$ ("eine Bedingung").

5. (a) Offensichtlich ist

$$\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix} = \frac{3}{2}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right)$$

d.h.

$$U = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \right\rangle .$$

Also

$$\dim U = \operatorname{rg}\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 2\\1 & 1\end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 2\\0 & 0\end{pmatrix} = 2\,,$$

$$\dim V = \operatorname{rg}\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 4\\1 & 1\end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 4\\0 & 0\end{pmatrix} = 2\,.$$

(b)

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \in U\,, \quad \begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \quad \in U$$

$$\Longrightarrow \quad V = U \quad \Longrightarrow U \cap V = U \quad \text{und} \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \right\} \text{ ist Basis von } U \cap V.$$

6. (a) Da $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ regulär ist, existiert genau ein A^{-1} mit $A^{-1}A = I$ (Inverse), d.h. durch

$$AX = B \quad \Longleftrightarrow \quad X = A^{-1}B$$

ist X eindeutig bestimmt.

(b)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

- 2. Zeile von 3. Zeile
- vertausche 1. Zeile und 2. Zeile

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

- 2. Zeile von 3. Zeile

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

- 3. Zeile von 1. Zeile
- 2-fache der 3. Zeile zur 2. Zeile

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Die Inverse von A ist also

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Eindeutige Lösung:

$$x = A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

7. (a) Erste Möglichkeit: $(A \cdot A^T)^T = (A^T)^T \cdot A^T = A \cdot A^T \quad \square$

Zweite Möglichkeit: $A = (a_{ij})$, $A \cdot A^T = (b_{ij})$,

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, a_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}\, a_{ik} = b_{ji} \quad \square$$

(b)

$$A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 14 \\ 0 & 3 & -3 \\ 14 & -3 & 31 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- 1. Zeile von 2. und 3. Zeile

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 2. Zeile zur 3. Zeile

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

D.h. $\mathbf{rg}\, \boldsymbol{A} = \mathbf{2}$.
Bemerkung: $\operatorname{rg} A = 2 \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{rg} A^T = 2 \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{rg}(A \cdot A^T) \leq 2$

$$A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 14 \\ 0 & 3 & -3 \\ 14 & -3 & 31 \end{pmatrix}$$

- (-2)-fache der 1. Zeile zur 3. Zeile

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 14 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

- 2. Zeile zur 3. Zeile

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 14 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

D.h. $\mathbf{rg}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A^T}) = \mathbf{2}$.