Lösung der zweiten Klausur
zu Lineare Algebra für Informatiker WS00/01 vom 12.02.00

1.

$$B := \begin{pmatrix} 14 & -5 & 11 & -17 & 3 \\ -2 & 1 & 3 & -6 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Addiert man das doppelte der zweiten Spalte zur ersten
und (danach) das dreifache der vorletzten Zeile zur letzten, so erhält man

$$\det B = \det \begin{pmatrix} 4 & -5 & 11 & -17 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -6 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} = 4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 10 = -40\,.$$

2. (a) offensichtlich gilt: $A \in \mathbb{R}^{n,n} \quad \Rightarrow \quad f(A) \in \mathbb{R}^{n,n}$.
$A, B \in \mathbb{R}^{n,n}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$$f(\lambda A + \mu B) = S^{-1}(\lambda A + \mu B)S = \lambda S^{-1}AS + \mu S^{-1}BS = \lambda f(A) + \mu f(B)\,,$$

also ist $f \in L(R^{n,n}, R^{n,n})$.

(b) Zum **Kern** von f:

$$f(A) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad S^{-1}AS = 0$$

multipliziere von links mit S und von rechts mit S^{-1}

$$\Leftrightarrow \quad A = 0\,, \quad \text{d.h. } \operatorname{Kern} f = \{0\}\,.$$

Zum **Bild** von f:

$$f(A) = B \quad \Leftrightarrow \quad S^{-1}AS = B \quad \Leftrightarrow \quad A = SBS^{-1}\,,$$

d.h. für jedes $B \in \mathbb{R}^{n,n}$ existiert (genau) ein $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ mit $f(A) = B$
$\Rightarrow \operatorname{Bild} f = \mathbb{R}^{n,n}$

(c)

$$\begin{aligned} f(AB) &= S^{-1}ABS = S^{-1}A\underbrace{SS^{-1}}_{=I}BS \\ &= (S^{-1}AS)(S^{-1}BS) = f(A)\,f(B) \end{aligned}$$

□

3. (a) Sei

$$S := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A = (a_{ij})\,,$$

$$f(A) = SAS = S \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \alpha \\ \beta & \beta & \beta \\ \gamma & \gamma & \gamma \end{pmatrix}$$

mit $\alpha = a_{11} + a_{12} + a_{13}$, $\beta = a_{21} + a_{22} + a_{23}$ und $\gamma = a_{31} + a_{32} + a_{33}$, also

$$f(A) = (\alpha + \beta + \gamma)S = S \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} a_{jk}\,.$$

Daher gilt:

$$\mathrm{Kern} f = \left\{ A \in \mathbb{R}^{3,3} \;\middle|\; \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} a_{jk} = 0 \right\}, \quad \dim \mathrm{Kern} f = 3^2 - 1 = 8\,,$$

$$\mathrm{Bild} f = \{ A \in \mathbb{R}^{n,n} \mid A = \lambda S\,,\ \lambda \in R \}\,, \quad \dim \mathrm{Bild} f = 1\,.$$

(b) $g \in L(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$, d.h. $\quad g:\ \mathbb{C}^n \ni x \mapsto g(x) \in \mathbb{C}$
mit $g(\lambda x + \mu y) = \lambda g(x) + \mu g(y)$ $(x, y \in \mathbb{C}^n\,,\ \lambda, \mu \in \mathbb{C})$. D.h. mit

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad x_j \in \mathbb{C}$$

gilt: g ist linear in jeder Komponente:

$$g(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j\,, \quad \alpha_j \in \mathbb{C}\,.$$

Mit der Definition

$$a := \begin{pmatrix} \overline{\alpha_1} \\ \vdots \\ \overline{\alpha_n} \end{pmatrix}$$

folgt die Behauptung $(g(x) = \bar{a}^T x)$.

4. (a)

$$\begin{aligned}
\chi_A(x)\chi_A(-x) &= \det(A-xI)\det(A+xI)\\
&= \det\big((A-xI)(A+xI)\big) = \det(A^2 - xA - Ax - x^2 I)\\
&= \det(A^2 - x^2 I) = \chi_{A^2}(x^2)
\end{aligned}$$

$\square$

(b)

$$\begin{aligned}
&v \in E_\lambda(A) \quad \Leftrightarrow \quad Av = \lambda v \ (v \neq 0)\\
&\Rightarrow A^2 x = A\lambda x = \lambda^2 x \quad \Leftrightarrow \quad v \in E_{\lambda^2}(A^2)\,,\\
&\text{d.h. } E_\lambda(A) \subset E_{\lambda^2}(A^2)\,.
\end{aligned}$$

$\square$

5. (a)

$$\begin{aligned} A \in \mathbb{R}^{n,n} \text{ nicht regulär} \quad &\Leftrightarrow \quad \operatorname{rg} A < n \\ &\Leftrightarrow \quad \dim \mathbb{L}_h = n - \operatorname{rg} A \geq 1 \quad \big(\mathbb{L}_h := \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, Ax = 0\}\big) \\ &\Leftrightarrow \quad \exists\, x \in \mathbb{R}^n\,,\ x \neq 0 \text{ mit } Ax = 0\,, \\ &\qquad\ \text{d.h. } \exists \text{ Eigenvektoren } x \neq 0 \text{ zum Eigenwert } 0\,, \\ &\qquad\ \text{d.h. } 0 \text{ ist Eigenwert}\,. \end{aligned}$$

(b) Offensichtlich ist $\lambda = 0$ einziger Eigenwert von B (mit algebraischer Vielfachheit 4). Zugehöriger Eigenraum:

$$E_0(B) = \Big\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Big\rangle\,.$$

Analog:

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

einziger Eigenwert 0 (mit algebraischer Vielfachheit 4). Zugehöriger Eigenraum:

$$E_0(B^2) = \Big\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Big\rangle,$$

und

$$B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

einziger Eigenwert 0 (mit algebraischer Vielfachheit 4). Zugehöriger Eigenraum:

$$E_0(B^2) = \Big\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Big\rangle\,.$$

6. $q_{_A}(x) = x^T A x$ mit

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} .$$

$$\begin{aligned}
\chi_{_A}(x) &= \det \begin{pmatrix} 1-x & 2 & 2 \\ 2 & 1-x & 2 \\ 2 & 2 & 1-x \end{pmatrix} && \text{“1. Zeile zur 2. und 3.”} \\
&= \det \begin{pmatrix} 1-x & 2 & 2 \\ 1+x & -(1+x) & 0 \\ 1+x & 0 & -(1+x) \end{pmatrix} && \text{“2. und 3. Spalte zur ersten”} \\
&= \det \begin{pmatrix} 5-x & 2 & 2 \\ 0 & -(1+x) & 0 \\ 0 & 0 & -(1+x) \end{pmatrix} = -(x-5)(x+1)^2 ,
\end{aligned}$$

d.h. A hat die Eigenwerte $\lambda_1 = -1$ (Vielfachheit 2) und $\lambda_2 = 5$; zugehörige Eigenräume:
zu λ_1:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \quad \rightsquigarrow \quad E_{\lambda_1} = \Big\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} , \ \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Big\rangle ,$$

zu λ_2:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right) \quad \rightsquigarrow \quad E_{\lambda_2} = \Big\langle \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Big\rangle .$$

Mit der Transformationsmatrix

$$U := \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

gilt ($U^T U = I$, also orthogonal)

$$U^T A U = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad q_{_{U^TAU}}(x) = -(x_1^2 + x_2^2) + 5x_3^2 .$$

7. (a) Bestimme zunächst $U^\perp$. $U^\perp$ ist Lösung von

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

"1. Zeile von 2. und 3."

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \quad U^\perp = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Mit der Definition

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ist U die Lösung von $Ax = 0$.

(b) Orthonarmalbasis von $U^\perp$:

$$\left\{ u_1 := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; u_2 := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Sei y die Projektion von a auf $U^\perp$

$$\begin{aligned} y &= (u_1 \cdot a)\, u_1 + (u_2 \cdot a)\, u_2 \\ &= \frac{3}{\sqrt{2}}\, u_1 + \frac{9}{\sqrt{2}}\, u_2 \,, \end{aligned}$$

dann ist der Abstand von a zu U gleich $||y|| = \sqrt{45}$.

8. (a)

$$\begin{aligned} q_{\alpha^2 A+\beta^2 B}(x) &= x^T\left(\alpha^2 A+\beta^2 B\right)x \\ &= \alpha^2\, x^T Ax+\beta^2\, x^T Bx \\ &= \alpha^2\, q_A(x)+\beta^2\, q_B(x) \end{aligned}$$

Da $q_A(x), q_B(x) > 0\ \forall\ x \in \mathbb{R}^n$ (A und B sind positiv definit),
und da $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha^2+\beta^2 > 0 \Rightarrow\ \alpha^2, \beta^2 \geq 0$, folgt

$$q_{\alpha^2 A+\beta^2 B}(x) > 0 \quad \forall\ x \in \mathbb{R}^n\ ,$$

d.h. $\alpha^2 A+\beta^2 B$ ist positiv definit. □

(b)

$$q_{S^TAS}(x) = x^T S^T ASx = (Sx)^T A(\underbrace{Sx}_{=:y}) = q_A(y)\,.$$

Da S regulär existiert für jedes $y \in \mathbb{R}^n$ genau ein $x \in \mathbb{R}^n$ mit $Sx = y$, d.h.

$$q_A(y) > 0\ \forall\ y \in \mathbb{R}^n \quad \Longleftrightarrow \quad q_{S^TAS}(x) > 0\ \forall\ x \in \mathbb{R}^n\ .$$

□

9. (a) Die Hauptminoren 10, 70, $\det A = 10(28-1) + 2\mathrm{i}(14\mathrm{i}) = 242$ sind alle größer Null, also ist A **positiv definit**.

   (b) A ist positiv definit
   $\Leftrightarrow$ alle Eigenwerte von A sind positiv
   $\Leftrightarrow$ alle Eigenwerte von A^{-1} sind positiv
   (denn, $\lambda \neq 0$ ist EW von $A \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda}$ ist EW von A^{-1})
   $\Leftrightarrow$ A^{-1} ist **postiv definit**

   (c) Die Hauptminoren von $-B$, 5, 9, 9 sind alle positiv, also ist B **negativ definit**.

   (d) B ist negativ definit
   $\Leftrightarrow$ alle Eigenwerte von B sind negativ (und insbesondere reell)
   $\Leftrightarrow$ alle Eigenwerte von B^2 sind positiv
   (denn, $\lambda < 0$ ist EW von $B \Leftrightarrow \lambda^2$ ist EW von B^2)
   $\Leftrightarrow$ B^2 ist **postiv definit**