

**1. Aufgabe:** Es seien  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  und  $B = \{0, 2, 4\}$ . Bestimmen Sie  $A \cup B$ ,  $A \setminus B$ ,  $B \setminus A$  und  $A \cap B$ . Untersuchen Sie die entstehenden Mengen bezüglich  $\subseteq$ .

**2. Aufgabe:** Es seien  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $B = \{0, 2, 4, 6\}$ ,  $C = \{0, 2, 3, 6\}$ . Bestimmen Sie  $(A \cap B) \cap C$  und  $A \cap (B \cap C)$ . Welche Rechenregeln für Vereinigung  $\cup$  und Schnitt  $\cap$  könnten gelten?

**3. Aufgabe:** Bestimmen Sie die Elemente von  $A = \{x \in \mathbb{Z} : x^3 = 4x\}$  und  $B = \{x \in \mathbb{Z} : |x| \leq 2\}$ . Untersuchen Sie, ob eine Menge Teilmenge der anderen ist?

**4. Aufgabe:** Die Potenzmenge  $\mathcal{P}(A)$  einer Menge  $A$  enthält alle Teilmengen dieser Menge  $A$ . Etwa gilt  $\mathcal{P}(\{1\}) = \{\{\}, \{1\}\}$  und  $\mathcal{P}(\{1, 2\}) = \{\{\}, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ . Bestimmen Sie die Potenzmenge von  $\emptyset = \{\}$  und von  $\{1, 2, 3\}$ . Wie groß sind diese Mengen? Wie groß ist eine Potenzmenge allgemein?

**5. Aufgabe:** Es seien  $A$ ,  $B$  und  $C$  Mengen. Zeichnen Sie die Venn-Diagramme zu  $(A \cap B) \cup C$  und  $(A \cup C) \cap (B \cup C)$ .

**6. Aufgabe:** Sind die Zahlen  $-2$ ,  $\frac{22}{7}$ ,  $\sqrt{9}$ ,  $\sqrt{10}$ ,  $\pi$  natürlich, ganz, rational oder reell? Welche davon können ohne Taschenrechner der Größe nach geordnet werden?

**7. Aufgabe:** Bestimmen Sie die rationalen Zahlen mit der periodischen Dezimaldarstellung  $0.02\overline{18}$  und  $31.\overline{21}$  und bestimmen Sie die periodische Dezimaldarstellung von  $\frac{13}{11}$  und von  $\frac{1}{7}$ .

**8. Aufgabe:** Berechnen Sie folgende Ausdrücke:

$$2^{(3^2)}, \quad (2^3)^2, \quad \frac{23}{32} + \frac{45}{54} + \frac{67}{76}, \quad \frac{21}{15}, \quad \frac{1}{7} + \frac{1}{7}, \quad \frac{1}{4} + \frac{1}{5}, \quad \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{5}}}}$$

**9. Aufgabe:** Der Reihe nach wird ausgehend von 1 so lange  $+1$  gerechnet, bis 100 erreicht wird. Also

$$1 + 1 = 2, \quad 2 + 1 = 3, \quad 3 + 1 = 4, \quad \dots, \quad 99 + 1 = 100.$$

Bei diesen Additionen werden alle Überträge aufgeschrieben. Welche Überträge können entstehen? Wie oft entsteht ein 1-Übertrag?

**10. Aufgabe:** Wann gilt  $[a, b] \subseteq [c, d]$  für Intervalle  $[a, b]$  und  $[c, d]$ ?

**11. Aufgabe:** Bestimmen Sie  $[1, 3] \cap [2, 4]$ ,  $[1, 3] \cap [3, 5]$ ,  $(1, 3) \cap (2, 4)$  und  $(1, 3) \cap [2, 4]$ . Welche Gestalt kann der Schnitt von zwei Intervallen allgemein haben?

**12. Aufgabe:** Es seien  $f: \{-2, -1, 0, 1, 2\} \rightarrow \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ,  $f(x) = x^2 - 2$  und  $g: \{-2, -1, 0, 1, 2\} \rightarrow \{0, 1, 2\}$ ,  $g(x) = |x|$ . Zeichnen Sie die Pfeildiagramme von  $f$ ,  $g$  und von  $g \circ f$ . Haben  $f$ ,  $g$  oder  $g \circ f$  Umkehrfunktionen?

**13. Aufgabe:** Es sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2x - 1$  eine Funktion. Skizzieren Sie den Funktionsgraph. Bestimmen Sie  $f(\{0, 1\})$  und  $f([2, 4])$ . Hierbei bezeichnet  $[2, 4]$  das abgeschlossene Intervall von 2 bis 4. Hat  $f$  eine Umkehrfunktion? Wenn ja, wie lautet diese?

**14. Aufgabe:** Bestimmen Sie  $\{1, 2\} \times \{1, 2, 3\}$  und  $\{1, 2, 3\} \times \{1, 2\}$ .

**15. Aufgabe:** Wie viele Elemente hat  $A \times B$ , wenn  $|A| = a$  und  $|B| = b$  gilt?

**16. Aufgabe:** Bestimmen Sie  $\{0, 1\}^2$ ,  $\{0, 1\}^3$ ,  $\{0, 1\}^4$ . Wie groß sind diese Mengen?

**17. Aufgabe:** Zeichnen Sie  $\{-1, 0, 1\} \times \{-1, 1\}$  und  $[0, 2] \times [0, 1]$  als Teilmengen von  $\mathbb{R}^2$ .

Das griechische Alphabet:

Großbuchstaben:  $A, B, \Gamma, \Delta, E, Z, H, \Theta, I, K, \Lambda, M, N, \Xi, O, \Pi, \Sigma, T, \Upsilon, \Phi, \Psi, \Omega$ .

Kleinbuchstaben:  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta, \vartheta, \iota, \kappa, \lambda, \mu, \nu, \xi, \omicron, \pi, \sigma, \tau, \upsilon, \phi, \psi, \omega$ .

Warum sind einige griechische Buchstaben "unbrauchbar"?

**18. Aufgabe:** Schreiben Sie  $2 + 5 + 8 + 11 + 14 + 17$  mithilfe von  $\sum$  auf zwei Arten. Schreiben Sie  $\sum_{n=1}^4 n^2$  mithilfe von  $+$ . Schreiben Sie  $\sum_{n=1}^3 (\sum_{k=1}^n k)$  mithilfe von  $+$  und Klammern.

**19. Aufgabe:** Bestimmen Sie  $1 + 3 + 5 + \dots + 97 + 99$  und  $(\frac{1}{3})^2 + (\frac{1}{3})^3 + (\frac{1}{3})^4 + \dots + (\frac{1}{3})^9$ .

**20. Aufgabe:** Bestimmen Sie  $(x^2 + x + 1) \cdot (x + 1)$  analog zur Multiplikation von Hand.

**21. Aufgabe:** Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden Gleichungen:

$$x^2(x - 1)(x + 2) = 0, \quad x^2 + 2x - 3 = 0, \quad |x - |x - 8|| = 4.$$

**22. Aufgabe:** Es seien  $\alpha, \beta$  positive reelle Zahlen. Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke:

$$\frac{\alpha + 2}{(\alpha + 1)^2(\alpha - 1)} + \frac{\alpha - 2}{(\alpha - 1)^2(\alpha + 1)}, \quad \left( \frac{\alpha^2(\alpha^4\beta^2)^5}{\alpha^4(\alpha\beta^2)^{-1}} \right)^{-3}, \quad \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{1}{\alpha}}}.$$

**23. Aufgabe:** Eliminieren Sie die Wurzeln im Nenner von  $\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ .

Hinweis:  $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ .

**24. Aufgabe:** Es seien  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  positive reelle Zahlen. Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke:

$$\log\left(\frac{\alpha\beta}{\gamma\delta}\right) - \log\left(\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}\right), \quad \sqrt{\exp(4\alpha)}, \quad \exp(\alpha \log(\beta)), \quad \log(\alpha \exp(\beta)).$$

**25. Aufgabe:** Es seien  $\alpha, \beta$  positive, reelle Zahlen und  $x$  bezeichne eine unbekannte reelle Zahl. Stellen Sie folgende Gleichungen zu  $x = \dots$  um:

$$(x + \alpha)^2 = \beta, \quad \frac{\alpha}{\alpha + x} = \beta, \quad \alpha^{2x+1} = \beta, \quad 5 = \log(\alpha x + \beta), \quad \cos(\alpha + x) = \frac{1}{2},$$

$$\log(\alpha + x) - \log(\beta + x) = 1, \quad \alpha + \sqrt{\beta + x} = 2, \quad \sin(\sqrt{\alpha + x}) = \beta.$$

**26. Aufgabe:** Gilt  $\sqrt{x^{\log x}} = x^{\log \sqrt{x}}$  für alle  $x > 0$  oder gilt  $\sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ ?

**27. Aufgabe:** Gilt  $\log(1 + 2 + 3) = \log(1) + \log(2) + \log(3)$ ?

**Räume:** Die Räume für die Gruppen am Nachmittag sind C2A17, N14, N15, N16, S6, S7, S8, H2C14. Die Räume N14, N15, N16, S6, S7, S8 haben auch andere Bezeichnungen: C3A35, C3H35, C3N35, C5H05, C5H10, C5H41. Diese Bezeichnungen folgen einem Schema:

Gebäude (ein Buchstabe)	Ebene (ein oder zwei Ziffern)	ein Buchstabe	zwei Ziffern
-------------------------	-------------------------------	---------------	--------------

Welche Bedeutung haben die letzten drei Stellen?

**28. Aufgabe:** Wie viele Klammerungen von  $1 + 2 + 3 + 4$  gibt es, wenn immer nur die Addition von zwei Zahlen erlaubt ist? Beispiele:  $((1 + 2) + 3) + 4$ ,  $(1 + 2) + (3 + 4)$ .

**29. Aufgabe:** Es seien

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie  $-\vec{v}$ ,  $2\vec{v}$ ,  $\vec{v} + \vec{w}$ ,  $5\vec{v} - 2\vec{w}$ ,  $\vec{v} \cdot \vec{w}$  und  $\vec{v} \times \vec{w}$ .

**30. Aufgabe:** Bestimmen Sie den Abstand zwischen den Punkten  $(1, 2, 3)$  und  $(2, 4, 5)$ .

**31. Aufgabe:** Bestimmen Sie die Gerade, welche durch die Punkte  $(1, 2)$  und  $(5, 5)$  bestimmt wird. Welche Möglichkeiten eine Gerade zu beschreiben kennen Sie?

**32. Aufgabe:** Bestimmen Sie die Ebene, welche durch die Punkte  $(1, 1, 1)$ ,  $(1, 2, 3)$  und  $(3, 2, 1)$  bestimmt wird. Welche Möglichkeiten eine Ebene zu beschreiben kennen Sie?

**33. Aufgabe:** Bestimmen Sie den Schnittpunkt der beiden Gerade  $2x + 5y = 7$  und  $x + 3y = 2$ .

**34. Aufgabe:** Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Ebenen  $x + 3y + 3z = 1$ ,  $2x + 2y + z = 2$  und  $3x + 3y + z = 3$ . Bestimmen Sie alle Punkte, welche auf der ersten und zweiten Ebene liegen.

**35. Aufgabe:** Ein Parallelogramm habe die Eckpunkte  $(1, 1)$ ,  $(4, 2)$  und  $(2, 3)$ . Bestimmen Sie den vierten Eckpunkt und den Flächeninhalt.

**36. Aufgabe:** Bestimmen Sie die Ableitung der folgenden Funktionen:

$$(2x + 3)^4, \quad \frac{x^2 - 2}{x^2 + 2}, \quad x \cos(x), \quad \log(x + 1), \\ (\sin(x))^2 + (\cos(x))^2, \quad \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \quad \log(\cos(x)), \quad x^{x^x}.$$

**37. Aufgabe:** Diskutieren Sie folgende Funktionen (Definitionsbereich, Nullstellen, lokale Extrema, Wendepunkte, Monotonie, Konvexität):

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}, \quad x^3 - 6x^2 + 11x - 6.$$

**38. Aufgabe:** Bestimmen Sie die Maße jenes Rechtecks mit Fläche 1 cm und minimalem Umfang.

**39. Aufgabe:** Bestimmen Sie die Maße jenes Zylinders mit Volumen 330 ml und minimaler Oberfläche.

**40. Aufgabe:** Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

$$\int 4x^2 + 3x + 2 \, dx, \quad \int x^3 + \sqrt[3]{x} \, dx, \quad \int \cos(2x + 5) \, dx, \quad \int (2x + 1)^3 \, dx, \quad \int 2^x \, dx.$$

**41. Aufgabe:** Wie groß ist der Flächeninhalt, welcher von der  $x$ -Achse und dem Funktionsgraphen der Funktion  $\sin$  im Bereich  $[0, \pi]$  umschlossen wird.