Vorkurs Mathematik

Dieses Dokument ist eine Zusammenfassung der Inhalte des Vorkurses Mathematik im Wintersemester 2017/2018. Bitte Anregungen und Fehler per Email an die Adresse

elmar.teufl@uni-tuebingen.de.

Weitere Informationen zur Veranstaltung finden sich auf der Internetseite

www.math.uni-tuebingen.de/vorkurs.

Elmar Teufl
Tübingen, 4. Oktober 2017

Kapitel 1

Etwas Logik und Mengenlehre

Einer *Aussage* ist ein Wahrheitswert zugeordnet: `WAHR` oder `FALSCH`. Das ist die charakterisierende Eigenschaft einer Aussage.

Beispiele: Der 4.10.2017 ist ein Mittwoch. Die Erde ist kein Planet.

Frage: Ist “Morgen regnet es.” eine Aussage?

Wahrheitswerten werden auch andere Bezeichnungen zugewiesen:

Langform	Kurzform	Englisch	Informatik
`WAHR`	`W`	`TRUE`	1
`FALSCH`	`F`	`FALSE`	0

Verknüpfungen: Sind A und B Aussagen, dann sind auch

- die Konjunktion “A und B” ($A \wedge B$),
- die Disjunktion “A oder B” ($A \vee B$, nicht ausschließend),
- die Negation “nicht A” ($\neg A$)

Aussagen. Das Symbol $\vee$ stammt vom lateinischen Wort *vel*, welches “oder” bedeutet. Eselsbrücke: Oder ($\vee$) ist oben offen.

Der Wahrheitsgehalt dieser Verknüpfungen kann mittels einer sogenannten *Wahrheitstafel* angegeben werden. Dabei werden alle möglichen Wahrheitswerte für die Aussagen A und B, sowie für das Ergebnis der Verknüpfung aufgelistet:

A	$\neg A$
`W`	`F`
`F`	`W`

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$
`W`	`W`	`W`	`W`
`W`	`F`	`F`	`W`
`F`	`W`	`F`	`W`
`F`	`F`	`F`	`F`

Mit Klammern wird die Reihenfolge bei mehreren Verknüpfungen festgelegt. Dabei ist es üblich, dass $\neg$ stärker als $\wedge$ und $\vee$ bindet und $\wedge$, $\vee$ als gleichwertig betrachtet werden.

Beispiele:

- $(\neg A) \vee B$, kurz $\neg A \vee B$.
- $(A \vee B) \wedge C$.

Ein *logischer Ausdruck* besteht aus Verknüpfungen von Aussagen mit korrekter Klammerung. Etwa ist $\neg(A \vee B) \wedge C$ ein logischer Ausdruck, aber $A \vee B \wedge C$ ist kein logischer Ausdruck.

Rechenregeln: Es seien A, B, C Aussagen, dann gilt:

- Assoziativität:
  $(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$.
  $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$.
  Aufgrund der Assoziativität können Klammern weggelassen werden: $A \wedge B \wedge C, \ldots$
- Kommutativität:
  $A \wedge B = B \wedge A$.
  $A \vee B = B \vee A$.
- Distributivität:
  $(A \wedge B) \vee C = (A \vee C) \wedge (B \vee C)$.
  $(A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$.
- de Morgansche Regeln:
  $\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$.
  $\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$.

Diese Rechenregeln können mithilfe von Wahrheitstafeln überprüft werden. Zum Beispiel für $\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$:

A	B	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee \neg B$
W	W	W	F	F	F	F
W	F	F	W	F	W	W
F	W	F	W	W	F	W
F	F	F	W	W	W	W

Für $(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$:

A	B	C	$A \wedge B$	$(A \wedge B) \wedge C$	$B \wedge C$	$A \wedge (B \wedge C)$
W	W	W	W	W	W	W
W	W	F	W	F	F	F
W	F	W	F	F	F	F
W	F	F	F	F	F	F
F	W	W	F	F	W	F
F	W	F	F	F	F	F
F	F	W	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F

Weitere Verknüpfungen:

- Implikation “wenn A dann B” ($A \to B$),
- Äquivalenz “A genau dann wenn B” ($A \leftrightarrow B$).

Die Wahrheitstafeln dafür lauten wie folgt:

A	B	$A \to B$	$A \leftrightarrow B$
W	W	W	W
W	F	F	F
F	W	W	F
F	F	W	W

Es gilt

$$A \to B = \neg A \vee B \qquad \text{und} \qquad A \leftrightarrow B = (A \to B) \wedge (B \to A) = (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A).$$

Eine *Menge* ist eine Sammlung von unterscheidbaren Objekten. Eine Menge kann mithilfe von geschweiften Klammern durch Aufzählung, zum Beispiel $\{1, 2, 3, 4\}$, oder durch Beschreibung, zum Beispiel

$$\{x : x \text{ ist eine gerade ganze Zahl}\} \qquad \text{oder} \qquad \{x \,|\, x \text{ ist eine gerade ganze Zahl}\},$$

angegeben werden.

Ein *Element* einer Menge ist ein Objekt, das in der Menge liegt. Ist M eine Menge und x ein Objekt, dann schreiben wir

- $x \in M$, wenn x in M liegt, und
- $x \notin M$, wenn x nicht in M liegt.

Allgemein ist $x \in M$ eine Aussage, da $x \in M$ entweder wahr oder falsch ist.

Beispiele: $1 \in \{1, 2, 3, 4\}$ und $0 \notin \{1, 2, 3, 4\}$.

Die *leere Menge* $\varnothing = \{\}$ hat keine Elemente, es gilt also $x \notin \varnothing$ für alle x.

Frage: Gibt es eine Menge M mit $M \in M$?

Die *Größe* (oder *Mächtigkeit* oder *Kardinalität*) einer Menge M ist die Anzahl der Elemente von M, welche auch unendlich sein kann. Die Größe wird mit $|M|$ oder mit $\#M$ bezeichnet.

Beispiele: $|\{1, 2, 3, 4\}| = 4$ und $|\{x : x \text{ ist eine gerade ganze Zahl}\}| = \text{unendlich} = \infty$.

Eine Menge B heißt *Teilmenge* einer Menge A, wenn jedes Element von B auch Element von A ist, also:

$$\text{Für jedes } x \text{ gilt } x \in B \to x \in A.$$

Wir sagen dann, dass B in A enthalten ist, und schreiben $B \subseteq A$ (oder auch $B \subset A$).

Beispiele: $\varnothing \subseteq \varnothing$, $\varnothing \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$, $\{1\} \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$, $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$, $\{1, 2, 3, 4\} \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$, aber $\{0\} \nsubseteq \{1, 2, 3, 4\}$, $\{4, 5\} \nsubseteq \{1, 2, 3, 4\}$.

Verknüpfungen: Es seien A und B Mengen.

- Vereinigung $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$.
- Schnitt $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$.
- Differenzmenge $A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$

Beispiele:

- $\{1,2,3,4\} \cup \{4,5\} = \{1,2,3,4,5\}$.
- $\{1,2,3,4\} \cap \{4,5\} = \{4\}$.
- $\{1,2,3,4\} \setminus \{4,5\} = \{1,2,3\}$.

Oft sind alle betrachteten Mengen in einer Menge, der sogenannten *Grundmenge*, enthalten. Ist Ω die Grundmenge und A eine Menge mit $A \subseteq \Omega$, dann heißt $\Omega \setminus A$ das *Komplement* von A bezüglich der Grundmenge Ω. Das Komplement wird oft mit $\overline{A}$ oder A^{c} bezeichnet.

Zwei Mengen A und B heißen *disjunkt*, wenn $A \cap B = \varnothing$ gilt.

Vergleich der Verknüpfungen bei der Logik und der Mengenlehre:

Logik (Aussagen A, B)	Mengenlehre (Mengen A, B)
$A \wedge B$	$A \cap B$
$A \vee B$	$A \cup B$
$\neg A$	$\overline{A}$

Rechenregeln: Es seien A, B, C Mengen (in einer Grundmenge Ω), dann gilt:

- Assoziativität:
  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.
  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
  Aufgrund der Assoziativität können Klammern weggelassen werden: $A \cup B \cup C$, ...
- Kommutativität:
  $A \cup B = B \cup A$.
  $A \cap B = B \cap A$.
- Distributivität:
  $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.
  $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.
- de Morgansche Regeln:
  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
  $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Um diese Rechenregeln nachzuprüfen, können die Rechenregeln für die Logik verwendet werden. Zum Beispiel:

$$
\begin{aligned}
(A \cup B) \cup C &= \{x \,:\, x \in (A \cup B) \vee x \in C\} \\
&= \{x \,:\, (x \in A \vee x \in B) \vee x \in C\} \\
&= \{x \,:\, x \in A \vee (x \in B \vee x \in C)\} \\
&= \{x \,:\, x \in A \vee (x \in (B \cup C)\} \\
&= A \cup (B \cup C).
\end{aligned}
$$

Alternativ können auch direkt Wahrheitstafeln verwendet werden:

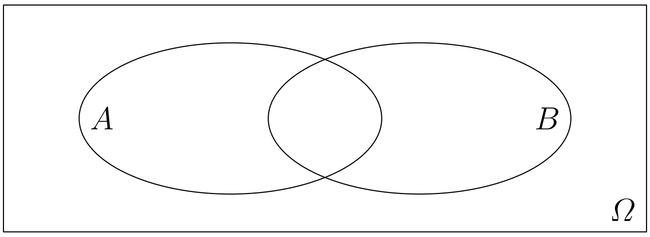
$x \in A$	$x \in B$	$x \in C$	$x \in A \cup B$	$x \in (A \cup B) \cup C$	$x \in B \cup C$	$x \in A \cup (B \cup C)$
W	W	W	W	W	W	W
W	W	F	W	W	W	W
W	F	W	W	W	W	W
W	F	F	W	W	F	W
F	W	W	W	W	W	W
F	W	F	W	W	W	W
F	F	W	F	W	W	W
F	F	F	F	F	F	F

Für alle x gilt damit:

$$x \text{ liegt genau dann } (A \cup B) \cup C, \text{ wenn } x \text{ in } A \cup (B \cup C) \text{ liegt.}$$

Also folgt $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

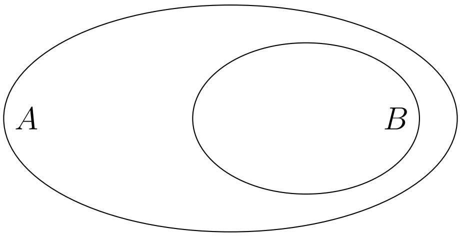
Bei einem sogenannten Venn-Diagramm werden Mengen als einfache geometrische Figuren (meist Ellipsen oder Rechtecke) in der Ebene dargestellt:



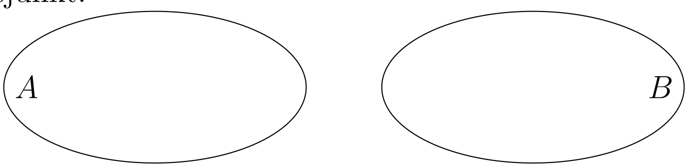
Obiges Venn-Diagramm zeigt zwei Mengen A und B in einer Grundmenge Ω. Die Grundmenge Ω wird dabei von A und B in vier Teile zerlegt: $A \cap B$, $A \cap \overline{B} = A \setminus B$, $\overline{A} \cap B = B \setminus A$ und $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$.

Darstellung von Teilmengen, Disjunktheit und Verknüpfungen durch Venn-Diagramme:

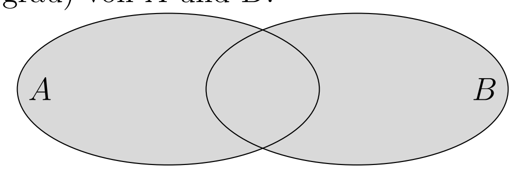
- $B \subseteq A$:



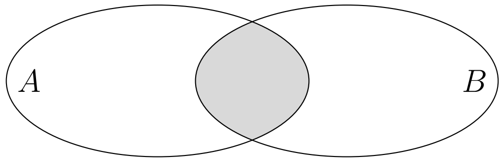
- A und B sind disjunkt:



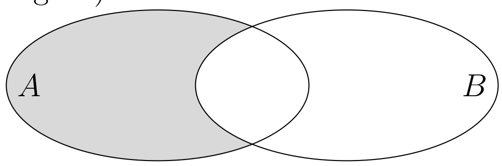
- Vereinigung $A \cup B$ (in grau) von A und B:



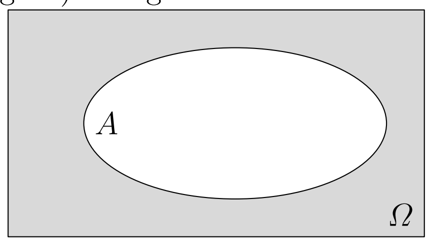
- Schnitt $A \cap B$ (in grau) von A und B:



- Differenzmenge $A \setminus B$ (in grau) von A und B:



- Komplement $\overline{A}$ von A (in grau) bezüglich Ω:



Das *kartesische Produkt* $A \times B$ von zwei Mengen A und B ist

$$A \times B = \{(a, b) \,:\, a \in A,\, b \in B\}.$$

Dabei ist (a, b) ein Paar mit dem ersten Eintrag a und dem zweiten Eintrag b. Insbesondere ist $A^2 = A \times A = \{(a, b) \,:\, a, b \in A\}$.

Beispiele:

$$\{1,2\}^2 = \{1,2\} \times \{1,2\} = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\},$$
$$\{1,2\} \times \{1,2,3\} = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3)\}.$$

Kapitel 2

Zahlen

Die Menge der *natürlichen Zahlen* ist

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

und die Menge der *ganzen Zahlen* ist

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

Auch $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ wird oft verwendet.

Ganze Zahlen können addiert, subtrahiert, multipliziert werden. Außerdem gibt es eine Division mit Rest.

Beispiele:

- Addition (mit Überträgen):

$$\begin{array}{r} 2304 \\ 4847 \\ 18953 \\ {\scriptstyle 1\,2\,1\,1} \\ \hline 26104 \end{array}$$

- Multiplikation (samt Addition mit Überträgen):

$$\begin{array}{l} 62 \cdot 357 \\ \hline 186 \\ 310 \\ 434 \\ {\scriptstyle 1\,1} \\ \hline 22134 \end{array}$$

- Division mit Rest:

$$\begin{array}{l} 3721 : 87 = 42 \quad \text{Rest} \quad 67 \\ \underline{-348} \\ 241 \\ \underline{-174} \\ 67 \end{array}$$

Eine ganze Zahl a heißt durch eine ganze Zahl b *teilbar*, wenn es eine ganze Zahl c mit $a = b \cdot c$ gibt. In diesem Fall heißt b ein *Teiler* von a und a heißt *Vielfaches* von b. Eine ganze Zahl $p \geq 2$, welche nur durch sich selbst und durch 1 teilbar ist, heißt *prim* oder *Primzahl*.

Beispiele:

- Die Zahl 6 hat die Teiler $1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6$.
- Jede ganze Zahl ist ein Teiler von 0 und ein Vielfaches von 1.
- Die ersten Primzahlen lauten: $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \ldots$

Satz: Jede natürliche Zahl n hat eine Primfaktorzerlegung:

$$n = {p_1}^{e_1}{p_2}^{e_2}\cdots{p_k}^{e_k},$$

wobei $p_1, p_2, \ldots, p_k$ aufsteigend geordnete Primzahlen sind und $e_1, e_2, \ldots, e_k$ natürliche Zahlen sind.

Beispiele:

- $60 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1$.
- $126 = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 7^1$.
- $61855248 = 2^4 \cdot 3^1 \cdot 7^3 \cdot 13^1 \cdot 17^2$.

Der *größte gemeinsame Teiler* $\mathrm{ggT}(a_1, \ldots, a_n)$ der ganzen Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ ist jene ganze Zahl $m \geq 0$, welche ein Teiler von $a_1, \ldots, a_n$ ist und welche selbst ein Vielfaches von jedem Teiler von $a_1, \ldots, a_n$ ist. Das *kleinste gemeinsame Vielfache* $\mathrm{kgV}(a_1, \ldots, a_n)$ ist jene ganze Zahl $m \geq 0$, welche ein Vielfaches von $a_1, \ldots, a_n$ ist und welche selbst ein Teiler von jedem Vielfachen von $a_1, \ldots, a_n$ ist.

Rechenregeln:

- Kommutativität: $\mathrm{ggT}(a_1, \ldots, a_n)$ und $\mathrm{kgV}(a_1, \ldots, a_n)$ hängen nicht von der Reihenfolge der Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ ab.
- Assoziativität: $\mathrm{ggT}(a_1, \ldots, a_n) = \mathrm{ggT}(a_1, \mathrm{ggT}(a_2, \ldots, a_n))$ und $\mathrm{kgV}(a_1, \ldots, a_n) = \mathrm{kgV}(a_1, \mathrm{kgV}(a_2, \ldots, a_n))$.
- $\mathrm{ggT}(a, a, \ldots) = \mathrm{ggT}(a, 0) = a$ und $\mathrm{kgV}(a, a, \ldots) = \mathrm{kgV}(a, 1) = a$.
- $\mathrm{ggT}(a, 1) = 1$ und $\mathrm{kgV}(a, 0) = 0$.
- Es gilt $\mathrm{ggT}(a, b) = \mathrm{ggT}(a, b - a)$ und $\mathrm{ggT}(a, b) = \mathrm{ggT}(a, r)$, wobei r der Divisionsrest von $a : b$ ist.

Berechnung mit der Primfaktorzerlegung: Wegen

$$\begin{aligned} 60 &= 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^0, \\ 126 &= 2^1 \cdot 3^2 \cdot 7^1 = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^0 \cdot 7^1 \end{aligned}$$

folgt

$$\mathrm{ggT}(60, 126) = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^0 \cdot 7^0 = 6$$

und

$$\mathrm{kgV}(60, 126) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^1 = 1260.$$

Eine *rationale Zahl* (ein *Bruch*) ist von der Form $\frac{a}{b}$ mit $a \in \mathbb{Z}$ und $b \in \mathbb{N}$. Üblicherweise werden Brüche in gekürzter Form angegeben: $\frac{a}{b}$ mit $a \in \mathbb{Z}$ und $b \in \mathbb{N}$ und $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$.

Die Menge der rationalen Zahlen wird mit $\mathbb{Q}$ bezeichnet:

$$\begin{aligned}\mathbb{Q} &= \{\tfrac{a}{b} \,:\, a \in \mathbb{Z},\, b \in \mathbb{N},\, \mathrm{ggT}(a,b) = 1\} \\ &= \{\ldots, \tfrac{-2}{1}, \tfrac{-1}{1}, \tfrac{0}{1}, \tfrac{1}{1}, \ldots \\ &\qquad \ldots, \tfrac{-3}{2}, \tfrac{-1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, \ldots \\ &\qquad \ldots, \tfrac{-2}{3}, \tfrac{-1}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, \ldots \\ &\qquad \ldots\}.\end{aligned}$$

Beispiel: Die gekürzte Form von $\frac{126}{60}$ ist $\frac{21}{10}$, da $\mathrm{ggT}(126,60) = 6$ und $\frac{126}{6} = 21$ und $\frac{60}{6} = 10$ gilt.

Rechnen mit Brüchen:

- Addition:
$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}\,.$$
- Multiplikation:
$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}\,.$$

Abschließend ist das Ergebnis in beiden Fällen in gekürzte Form zu bringen.

Satz: Die rationalen Zahlen sind genau jene Zahlen mit periodischer Dezimaldarstellung.

Beispiele:

- $\frac{1}{2} = 0.5 = 0.5000\ldots = 0.50^\bullet = 0.5\overline{0}$.
- $\frac{1}{3} = 0.333\ldots = 0.3^\bullet = 0.\overline{3}$.
- $\frac{1}{6} = 0.1666\ldots = 0.16^\bullet = 0.1\overline{6}$.
- $\frac{12}{7} = 1.714285\,714285\,\ldots = 1.\overline{714285}$:
$$\begin{array}{l} 12 : 7 = 1\,.\,714285\ldots \\ \;\;50 \\ \;\;\;\;10 \\ \;\;\;\;\;\;30 \\ \;\;\;\;\;\;\;\;20 \\ \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;60 \\ \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;40 \\ \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;5\ldots \end{array}$$
- Die Zahl $2.\overline{35}$ stellt den Bruch $\frac{233}{99}$ dar.
Dazu sei $x = 2.\overline{35}$, dann gilt $100x = 235.\overline{35}$ und
$$99x = 100x - x = 235.\overline{35} - 2.\overline{35} = 233,$$
woraus $x = \frac{233}{99}$ folgt.
- Die Zahl $52.1\overline{23}$ stellt den Bruch $\frac{2868}{55}$ dar.
Dazu sei $x = 52.1\overline{45}$, dann gilt $10x = 521.\overline{45}$ und $1000x = 52145.\overline{45}$ und
$$990x = 1000x - 10x = 52145.\overline{45} - 521.\overline{45} = 51624,$$
woraus
$$x = \frac{51624}{990} = \frac{2868}{55}\,.$$

Satz: Ist n eine natürliche Zahl, welche nicht durch 2 und nicht durch 5 teilbar ist, dann hat n ein Vielfaches der Form $999\ldots9$.

Beispiel: Die Zahl 7 hat das Vielfache 999999. Dazu sei $x = \frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$. Wegen $1000000x = 142857.\overline{142857}$ folgt

$$999999x = 1000000x - x = 142857 \qquad \text{und} \qquad x = \frac{142857}{999999}\,.$$

Zusammen mit $x = \frac{1}{7}$ ergibt das $142857 \cdot 7 = 999999$.

Eine *reelle Zahl* ist eine Zahl mit einer "beliebigen" Dezimaldarstellung. Die Menge der reellen Zahlen wird mit $\mathbb{R}$ bezeichnet. Für die Mengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ gilt somit:

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}.$$

Beispiele:

- Die Zahl mit der Dezimaldarstellung
$$0.101101110\underbrace{1111}_{4}0\underbrace{11111}_{5}0\ldots$$
ist ein Element von $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, da diese Zahl keine periodische Dezimaldarstellung besitzt.
- Die Zahl $\sqrt{2}$ ist ein Element von $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
Angenommen, $\sqrt{2}$ wäre eine rationale Zahl, dann hätte $\sqrt{2}$ eine Darstellung als gekürzter Bruch $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ mit $a, b \in \mathbb{N}$ und $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$. Damit würde $b \cdot \sqrt{2} = a$ und $b^2 \cdot 2 = a^2$ folgen. Also müsste a^2 durch 2 teilbar sein, und damit auch a. Das würde bedeuten, dass a^2 sogar durch 4 teilbar wäre. Damit wäre aber b^2 durch 2 teilbar, und damit auch b. Das wäre ein Widerspruch zu $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$.

Rechenregeln: Es seien a, b, c reelle Zahlen, dann gilt:

- Assoziativität:
$(a + b) + c = a + (b + c)$.
$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
- Kommutativität:
$a + b = b + a$.
$a \cdot b = b \cdot a$.
- Distributivität:
$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Ein *Intervall* ist eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ der Form

- (abgeschlossen)
$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \,:\, a \le x \wedge x \le b\}$,
- (offen)
$(a, b) =]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \,:\, a < x \wedge x < b\}$,
- (halb offen)
$[a, b) = [a, b[= \{x \in \mathbb{R} \,:\, a \le x \wedge x < b\}$ oder
$(a, b] =]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \,:\, a < x \wedge x \le b\}$.

Der *Absolutbetrag* oder *Betrag* $|x|$ einer reellen Zahl x ist

$$|x| = \begin{cases} x & \text{falls } x \ge 0, \\ -x & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Beispiele: $|3.5| = 3.5$, $|-2| = 2$.

Potenzen: Bei einer Potenz x^a heißt x die *Basis* und a der *Exponent*. Potenzen sind definiert

- für $x \in \mathbb{R}$ und $a = n$ mit $n \in \mathbb{N}$ ($x^n = x \cdots x$), oder
- für $x \neq 0$ und $a = 0$ ($x^0 = 1$), oder
- für $x \geq 0$ und $a = \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ mit $a > 0$ ($x^{r/s} = (x^{1/s})^r$ mit $x^{1/s} = \sqrt[s]{x}$), oder
- für $x \geq 0$ und $a > 0$ beliebig, oder
- für $x > 0$ und $a = -b$ mit $b > 0$ ($x^{-b} = (\frac{1}{x})^b$).

0^0 wird nicht festgelegt.

Beispiele: $1^1 = 1$, $1^0 = 1$, $10^2 = 100$, $2^{10} = 1024$, $81^{1/4} = 3$.

Rechenregeln:

- $x^a x^b = x^{a+b}$.
- $(x^a)^b = x^{ab}$.
- $x^a y^a = (xy)^a$.

Frage: Was bedeutet 2^{2^2}?

Logarithmen: Der *Logarithmus* $\log_b x$ von $x > 0$ zur Basis $b > 0$ ist jene Zahl a, welche eindeutig durch die Gleichung $b^a = x$ festgelegt wird. Es gilt also $b^{\log_b x} = x$.
Spezielle Basen: $b = 10$ (dekadischer Logarithmus), $b = 2$ (dyadischer Logarithmus), $b = e = 2.71828\ldots$ (natürlicher Logarithmus).

Rechenregeln:

- $\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$.
- $\log_b(x^a) = a \log_b x$.
- $\log_b 1 = 0$ und $\log_b b = 1$.

Um diese Rechenregeln für Logarithmen nachzuprüfen können die Rechenregeln für Potenzen verwendet werden. Zum Beispiel: Aus

$$xy = b^{\log_b(xy)} \qquad \text{und} \qquad xy = b^{\log_b x} b^{\log_b y} = b^{\log_b x + \log_b y}$$

folgt $\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$ (Eindeutigkeit!). Oder aus

$$x^a = b^{\log_b(x^a)} \qquad \text{und} \qquad x^a = (b^{\log_b x})^a = b^{a \log_b x}$$

folgt $\log_b(x^a) = a \log_b x$ (Eindeutigkeit!).

Frage: Ist $\log_e 2$ rational?

Die Gleichung $x^2 = -1$ hat in $\mathbb{R}$ keine Lösungen. Daher wird $\mathbb{R}$ um die *imaginäre Einheit* erweitert: $i = \sqrt{-1}$. Eine *komplexe Zahl* ist von der Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Dabei heißt a Realteil, b Imaginärteil. Ist $z = a + bi$ eine komplexe Zahl, dann ist $\overline{z} = a - bi$ die *komplex Konjugierte* von z und $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ der Absolutbetrag von z. Die Menge der komplexen Zahlen ist $\mathbb{C} = \{a + bi \,:\, a, b \in \mathbb{R}\}$.

Rechnen in $\mathbb{C}$:

- $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$.
- $(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$.
- $\frac{1}{c+di} = \frac{c}{c^2+d^2} - \frac{d}{c^2+d^2} i$.

Kapitel 3

Gleichungen und Ungleichungen

Beispiel: (lineare Gleichung)
Gesucht ist die Lösungsmenge von $ax + b = 0$.
Lösungsmenge: $\{-\frac{b}{a}\}$, falls $a \neq 0$, $\varnothing$, falls $a = 0$ und $b \neq 0$, und $\mathbb{R}$ falls $a = b = 0$.

Beispiel: (quadratische Gleichung)
Gesucht ist die Lösungsmenge von $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a \neq 0$.
Lösungsmenge für $b^2 - 4ac \geq 0$:

$$\left\{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right\}.$$

Lösungsmenge (in $\mathbb{R}$) für $b^2 - 4ac < 0$: $\varnothing$.

Beispiel: (Gleichungen mit Beträgen)
Gesucht ist die Lösungsmenge von $|1 - |x - 2|| = 2$. Dazu verwenden wir Fallunterscheidungen, denn

$$|x - 2| = \begin{cases} x - 2 & \text{falls } x - 2 \geq 0 \text{, das heißt } x \geq 2, \\ -x + 2 & \text{falls } x - 2 < 0 \text{, das heißt } x < 2. \end{cases}$$

- 1. Fall: $x \geq 2$:

  $$|1 - |x - 2|| = |1 - (x - 2)| = |3 - x| = \begin{cases} 3 - x & \text{falls } 3 - x \geq 0 \text{, das heißt } x \leq 3, \\ -3 + x & \text{falls } 3 - x < 0 \text{, das heißt } x > 3. \end{cases}$$

  (a) $x \leq 3$, also $x \in [2, 3]$:
  $3 - x = 2 \Longrightarrow x = 1 \notin [2, 3]$.
  Es gibt in diesem Fall keine Lösungen.
  (b) $x > 3$:
  $-3 + x = 2 \Longrightarrow x = 5 > 3$.
  Also ist $x = 5$ eine Lösung.
- 2. Fall: $x < 2$:

  $$|1 - |x - 2|| = |1 + (x - 2)| = |x - 1| = \begin{cases} x - 1 & \text{falls } x - 1 \geq 0 \text{, das heißt } x \geq 1, \\ -x + 1 & \text{falls } x - 1 < 0 \text{, das heißt } x < 1. \end{cases}$$

(a) $x \geq 1$, also $x \in [1, 2)$:
$x - 1 = 2 \Longrightarrow x = 3 \notin [1, 2)$.
Es gibt in diesem Fall keine Lösungen.

(b) $x < 1$:
$-x + 1 = 2 \Longrightarrow x = -1 < 1$.
Also ist $x = -1$ eine Lösung.

Lösungsmenge: $\{-1, 5\}$.

Beispiel: (Gleichungen mit Wurzeln)
Gesucht ist die Lösungsmenge von $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} = 2$.
Quadrieren ergibt:

$$(x + 1) + 2\sqrt{(x + 1)(x - 1)} + (x - 1) = 4.$$

Also:

$$\sqrt{x^2 - 1} = 2 - x.$$

Erneutes Quadrieren ergibt:

$$x^2 - 1 = (2 - x)^2 \Longrightarrow x^2 - 1 = 4 - 4x + x^2 \Longrightarrow 4x = 5 \Longrightarrow x = \tfrac{5}{4}.$$

Kontrolle:

$$\sqrt{\tfrac{5}{4} + 1} + \sqrt{\tfrac{5}{4} - 1} = \sqrt{\tfrac{9}{4}} + \sqrt{\tfrac{1}{4}} = \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2} = 2.$$

Also ist $x = \frac{5}{4}$ eine Lösung.
Lösungsmenge: $\{\frac{5}{4}\}$.

Beispiel: (quadratische Ungleichungen)
Gesucht sind Zahlen x mit $x^2 \leq 4$, das heißt $x^2 - 4 \leq 0$.
Dazu betrachten wir $x^2 - 4 = 0$. Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen $x = \pm 2$.
Daraus folgt:

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x - (-2)) = (x - 2)(x + 2).$$

Gesucht sind also alle Zahlen x mit $(x - 2)(x + 2) \leq 0$.

- 1. Fall: $x - 2 \geq 0$ und $x + 2 \leq 0$.
  Daraus folgt $x \geq 2$ und $x \leq -2$. Widerspruch.
- 2. Fall: $x - 2 \leq 0$ und $x + 2 \geq 0$.
  Also $x \leq 2$ und $x \geq -2$, das heißt $x \in [-2, 2]$.

Insgesamt: $\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 \leq 0\} = [-2, 2]$.

Kapitel 4

Summen und Produkte

Die Schreibweisen $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ und $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \cdots \cdot a_n$ werden rasch unübersichtlich und mühsam. Als Alternativen gibt es das Summenzeichen ($\sum$, vom griechischen Großbuchstaben Σ für Summe) und das Produktzeichen ($\prod$, vom griechischen Großbuchstaben Π für Produkt):

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$
$$\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n.$$

Allgemeiner:

$$\sum_{k=r}^{s} a_k = a_r + a_{r+1} + \cdots + a_s,$$

wobei

- a_k der k-te Summand der Summe,
- k der Laufindex der Summe,
- r die untere Grenze der Summe,
- s die obere Grenze der Summe ist.

Der Laufindex durchläuft der Reihe nach die ganzen Zahlen

$$r, r+1, r+2, \ldots, s.$$

Analog:

$$\prod_{k=r}^{s} a_k = a_r \cdot a_{r+1} \cdot \cdots \cdot a_s,$$

wobei

- a_k der k-te Faktor des Produkts ist,
- *et cetera.*

Beispiel:

$$\sum_{k=3}^{6}(2k+1) = 7+9+11+13, \qquad \prod_{k=-2}^{2}(k^2+1) = 5\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 5.$$

Rechenregeln:

$$\sum_{k=r}^{s}(ca_k) = c\sum_{k=r}^{s}a_k, \quad \sum_{k=r}^{s}(a_k+b_k) = \sum_{k=r}^{s}a_k + \sum_{k=r}^{s}b_k, \quad \sum_{k=r}^{t}a_k = \sum_{k=r}^{s}a_k + \sum_{k=s+1}^{t}a_k,$$
$$\prod_{k=r}^{s}(ca_k) = c^{s-r+1}\prod_{k=r}^{s}a_k, \quad \prod_{k=r}^{s}(a_k\cdot b_k) = \prod_{k=r}^{s}a_k\cdot\prod_{k=r}^{s}b_k, \quad \prod_{k=r}^{t}a_k = \prod_{k=r}^{s}a_k\cdot\prod_{k=s+1}^{t}a_k.$$

Laufindex verschieben:

$$a_1+a_2+a_3+a_4 = \sum_{k=1}^{4}a_k = \sum_{k=0}^{3}a_{k+1} = \sum_{k=2}^{5}a_{k-1} = \cdots.$$

Beispiel: ("Teleskop-Summe")

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\big((k+1)^2-k^2\big) &= \sum_{k=1}^{n}(k+1)^2 - \sum_{k=1}^{n}k^2 = \sum_{k=2}^{n+1}k^2 - \sum_{k=1}^{n}k^2\\ &= \left(\sum_{k=2}^{n}k^2+(n+1)^2\right) - \left(1+\sum_{k=2}^{n}k^2\right)\\ &= (n+1)^2-1 = n^2+2n+1-1 = n^2+2n.\end{aligned}$$

Geometrische Summe:

$$\sum_{k=0}^{n}a^k = a^0+a^1+\cdots+a^n = ???$$

Wir betrachten

$$\begin{aligned}(a-1)\sum_{k=0}^{n}a^k &= a\sum_{k=0}^{n}a^k - \sum_{k=0}^{n}a^k = \sum_{k=0}^{n}a^{k+1} - \sum_{k=0}^{n}a^k\\ &= \sum_{k=1}^{n+1}a^k - \sum_{k=0}^{n}a^k = \left(\sum_{k=1}^{n}a^k + a^{n+1}\right) - \left(1+\sum_{k=1}^{n}a^k\right) = a^{n+1}-1.\end{aligned}$$

Also gilt

$$\sum_{k=0}^{n}a^k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}.$$

Kleiner Gauß:

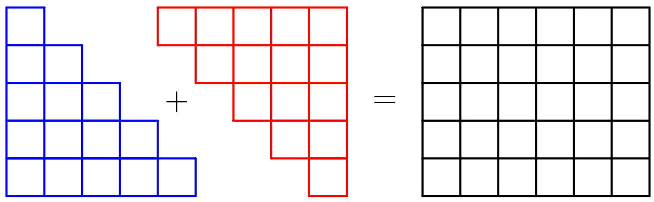
$$\sum_{k=1}^{n}k = 1+2+\cdots+n = ???$$

Gauß-Trick:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & + & 2 & + & \cdots & + & (n-1) & + & n & & \\ n & + & (n-1) & + & \cdots & + & 2 & + & 1 & & \\ \hline (n+1) & + & (n+1) & + & \cdots & + & (n+1) & + & (n+1) & = & n\cdot(n+1) \end{array}$$

Also $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$.

Gauß-Trick geometrisch:



Bernoulli-Trick: Wegen $(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1$ folgt

$$\sum_{k=1}^{n}(k+1)^2 = \sum_{k=1}^{n}(k^2+2k+1) = \sum_{k=1}^{n}k^2 + 2\sum_{k=1}^{n}k + \underbrace{\sum_{k=1}^{n}1}_{=n}.$$

Umstellen:

$$\begin{aligned} 2\sum_{k=1}^{n}k &= \sum_{k=1}^{n}(k+1)^2 - \sum_{k=1}^{n}k^2 - n = \sum_{k=2}^{n+1}k^2 - \sum_{k=1}^{n}k^2 - n \\ &= (n+1)^2 - 1 - n = n(n+1). \end{aligned}$$

Also $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$.

Fakultät: $(n \in \mathbb{N})$

$$0! = 1 \qquad \text{und} \qquad n! = n\cdot(n-1)\cdots 1 = \prod_{k=1}^{n}k.$$

Binomialkoeffizient: $(n \in \mathbb{N}\cup\{0\},\ k \in \{0,1,\ldots,n\})$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Pascal'sche Regel:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \qquad \text{und} \qquad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Pascal'sches Dreieck:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & \binom{0}{0}=1 & & & & \\ & & & \binom{1}{0}=1 & & \binom{1}{1}=1 & & & \\ & & & & \diagdown\ \diagup & & & & \\ & & \binom{2}{0}=1 & & \binom{2}{1}=2 & & \binom{2}{2}=1 & & \\ & & & \diagdown\ \diagup & & \diagdown\ \diagup & & & \\ & \binom{3}{0}=1 & & \binom{3}{1}=3 & & \binom{3}{2}=3 & & \binom{3}{3}=1 & \\ & & \diagdown\ \diagup & & \diagdown\ \diagup & & \diagdown\ \diagup & & \\ \binom{4}{0}=1 & & \binom{4}{1}=4 & & \binom{4}{2}=6 & & \binom{4}{3}=4 & & \binom{4}{4}=1 \end{array}$$

Binomische Formel:

$$\begin{aligned}
(a+b)^0 &= 1 \cdot a^0 b^0, \\
(a+b)^1 &= 1 \cdot a^1 b^0 + 1 \cdot a^0 b^1, \\
(a+b)^2 &= 1 \cdot a^2 b^0 + 2 \cdot a^1 b^1 + 1 \cdot a^0 b^2, \\
(a+b)^3 &= 1 \cdot a^3 b^0 + 3 \cdot a^2 b^1 + 3 \cdot a^1 b^2 + 1 \cdot a^0 b^3, \\
&\ \ \dots
\end{aligned}$$

Allgemein:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \dots + \binom{n}{n} a^0 b^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Beweis?

Vollständige Induktion: Es sei $A(n)$ eine Aussage, die von einer ganzen Zahl $n \geq 0$ (oder $n \geq 1$) abhängt. Wir beweisen zweierlei:

- Induktionsanfang: $A(n)$ gilt für $n = 0$ (oder $n = 1$).
- Induktionsschritt: Wenn $A(n)$ für ein beliebiges n gilt (Induktionsvoraussetzung), dann gilt auch $A(n+1)$.

Damit gilt $A(n)$ für alle $n \geq 0$ (oder für alle $n \geq 1$).

Beispiel: Es sei $A(n)$ die Gleichheit $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} n(n+1)$.

- Induktionsanfang für $n = 1$: $\sum_{k=1}^{1} k = 1$ und $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1+1) = 1$. Also gilt $A(1)$.
- Induktionsschritt:

$$\begin{aligned}
A(n) \text{ ist } &\sum_{k=1}^{n} k = \tfrac{1}{2} n(n+1), \\
A(n+1) \text{ ist } &\sum_{k=1}^{n+1} k = \tfrac{1}{2}(n+1)(n+1+1).
\end{aligned}$$

Damit:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = \tfrac{1}{2} n(n+1) + (n+1) = \tfrac{1}{2}(n+1)(n+1+1).$$

Beispiel: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $n^2 + n$ gerade.

- Induktionsanfang für $n = 1$: $1^2 + 1 = 2$ ist gerade.
- Induktionsschritt:

$$\begin{aligned}
A(n) &\text{ ist “} n^2 + n \text{ ist gerade”}, \\
A(n+1) &\text{ ist “} (n+1)^2 + (n+1) \text{ ist gerade”}.
\end{aligned}$$

Damit:

$$(n+1)^2 + (n+1) = n^2 + 2n + 1 + n + 1 = \underbrace{n^2 + n}_{\text{ist gerade}} + \underbrace{2n + 2}_{\text{ist gerade}}$$

ist eine gerade Zahl.

Beweis der Binomischen Formel:

- Induktionsanfang für $n = 0$:

$$(a+b)^0 = 1 = 1 \cdot a^0 b^0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

- Induktionsschritt:

$$A(n) \text{ ist die Gleichheit } (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k,$$
$$A(n+1) \text{ ist die Gleichheit } (a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k.$$

Damit:

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)\cdot(a+b)^n = (a+b)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k + b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k.
\end{aligned}$$

Kapitel 5

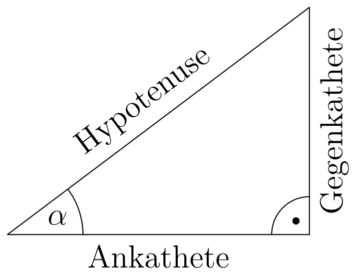
Trigonometrie

Winkel werden in Grad oder im Bogenmaß gemessen:

$$\text{voller Winkel} = 360° = 2\pi.$$

2π ist der Umfang eines Kreises mit Radius 1.

Winkelfunktionen:



Sinus: $\sin\alpha = \dfrac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$

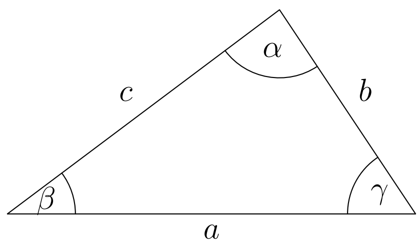
Kosinus: $\cos\alpha = \dfrac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$

Tangens: $\tan\alpha = \dfrac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

Satz von Pythagoras:

$$(\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2 = 1.$$

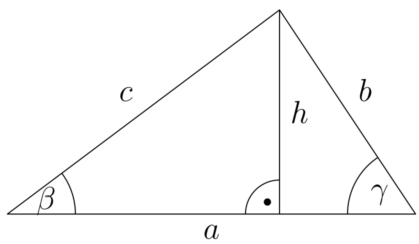
Sinussatz & Kosinussatz:



Sinussatz: $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$

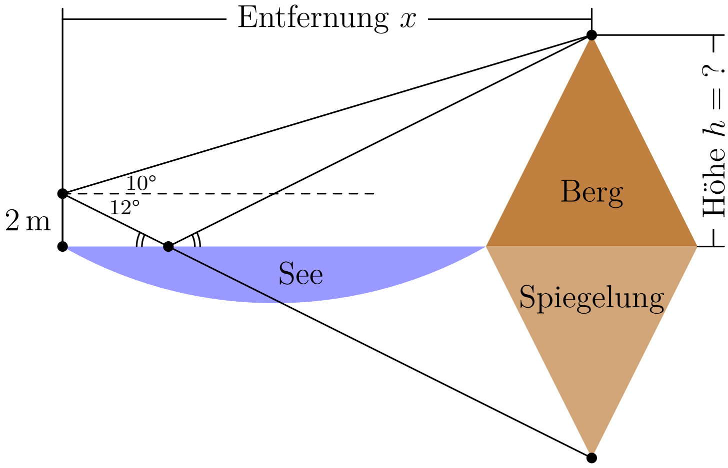
Kosinussatz: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

Beweis zum Sinussatz:



Es gilt: $\sin\beta = \frac{h}{c}$ und $\sin\gamma = \frac{h}{b}$.
Damit: $c\sin\beta = h = b\sin\gamma$.
Also: $\frac{\sin\beta}{b} = \frac{h}{bc} = \frac{\sin\gamma}{c}$.

Der Berg im See:



Es gilt:

$$\tan(10°) = \frac{h-2}{x} \qquad \text{und} \qquad \tan(12°) = \frac{h+2}{x}\,.$$

Damit:

$$\frac{h-2}{\tan(10°)} = x = \frac{h+2}{\tan(12°)}\,,$$
$$h = \frac{2(\tan(12°)+\tan(10°))}{\tan(12°)-\tan(10°)} \approx 21.4677\ldots\ \text{m}.$$

Additionstheoreme:
$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$,
$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$.

Winkelverdoppelung: $(\alpha = \beta)$
$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$,
$\cos(2\alpha) = (\cos\alpha)^2 - (\sin\alpha)^2$.

Folgerung:
Mithilfe des Satzes von Pythagoras $(\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2 = 1$ folgt

$$\begin{aligned}\cos(2\alpha) &= (\cos\alpha)^2 - (1-(\cos\alpha)^2)\\ &= 2(\cos\alpha)^2 - 1.\end{aligned}$$

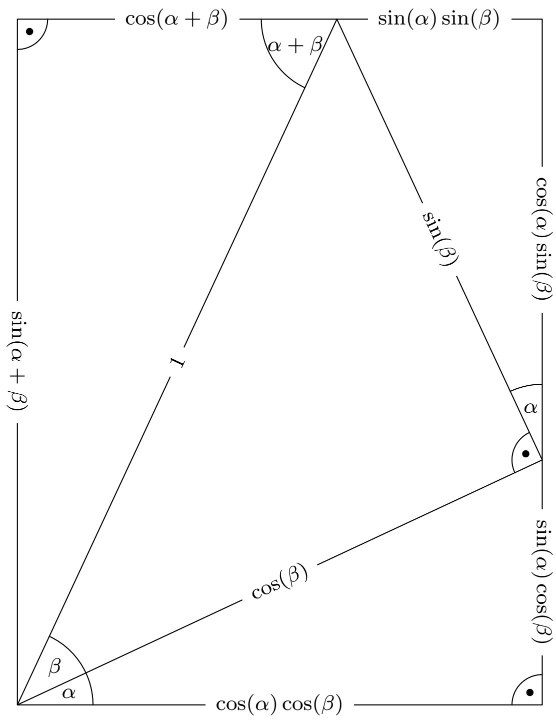
Also

$$4(\cos\alpha)^2 = 2 + 2\cos(2\alpha)$$

und

$$2\cos\alpha = \sqrt{2+2\cos(2\alpha)}$$

für $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$.



Insbesondere gilt für $\alpha = \frac{\pi}{2}$

$$
\begin{aligned}
2\cos(\tfrac{\pi}{2}) &= 0,\\
2\cos(\tfrac{\pi}{4}) &= \sqrt{2+0} = \sqrt{2},\\
2\cos(\tfrac{\pi}{8}) &= \sqrt{2+\sqrt{2}},\\
2\cos(\tfrac{\pi}{16}) &= \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},\\
2\cos(\tfrac{\pi}{32}) &= \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}},\\
&\dots\\
2 &= \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}}},
\end{aligned}
$$

da $\cos 0 = 1$ ist.

Kapitel 6

Vektoren

Ebene: $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \,:\, x, y \in \mathbb{R}\}$.
Raum: $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) \,:\, x, y, z \in \mathbb{R}\}$.
Allgemein: $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ mal}} = \{(x_1, \ldots, x_n) \,:\, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$.

Zeilenvektor: $(x_1, \ldots, x_n)$. Spaltenvektor: $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Länge eines Vektors: (Satz von Pythagoras)

$$\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Rechnen mit Vektoren:

- Addition:
$$\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{pmatrix}.$$
- Multiplikation mit einer Zahl (Skalar) $\alpha \in \mathbb{R}$:
$$\alpha \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha v_1 \\ \vdots \\ \alpha v_n \end{pmatrix}.$$
- Skalarprodukt:
$$\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} u_k v_k = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n.$$

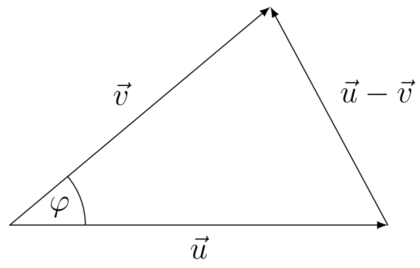
Rechenregeln: Es seien $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ und es seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$.
- $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.
- $(\alpha\beta)\vec{u} = \alpha(\beta\vec{u})$.
- $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$.
- $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.
- $(\alpha\vec{u}) \cdot \vec{v} = \alpha(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (\alpha\vec{v})$.
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$.
- $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$.
- $\|\alpha\vec{u}\| = |\alpha|\|\vec{u}\|$.

Winkel zwischen $\vec{u}$ und $\vec{v}$: Der zwischen den Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ eingeschlossene Winkel φ mit $\varphi \in [0, 180°]$ erfüllt

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| \cos\varphi.$$

Insbesondere gilt $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ genau dann, wenn $\varphi = 90°$ ist.



Beweis: Mithilfe des Kosinussatzes gilt

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| \cos\varphi.$$

Aufgrund der Rechenregeln gilt

$$\begin{aligned} \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 &= (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) \\ &= \vec{u} \cdot \vec{u} - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v} \\ &= \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\cancel{\|\vec{u}\|^2} - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \cancel{\|\vec{v}\|^2} = \cancel{\|\vec{u}\|^2} + \cancel{\|\vec{v}\|^2} - 2\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| \cos\varphi$$

und

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| \cos\varphi.$$

Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ -(u_1 v_3 - u_3 v_1) \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}.$$

Eigenschaften: Es seien $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$.

- $\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$ und $\vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$.
  Also steht $\vec{u} \times \vec{v}$ senkrecht auf $\vec{u}$ und $\vec{v}$.
- $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$.
- $\vec{u} \times \vec{u} = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Länge des Kreuzproduktes: Wegen

$$\begin{aligned}\|\vec{u}\times\vec{v}\|^2 &= (\vec{u}\times\vec{v})\cdot(\vec{u}\times\vec{v})\\ &= \ldots\ \text{Rechnen}\ \ldots\\ &= \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 - (\vec{u}\cdot\vec{v})^2\\ &= \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2\underbrace{(1-(\cos\varphi)^2)}_{=(\sin\pi)^2}\end{aligned}$$

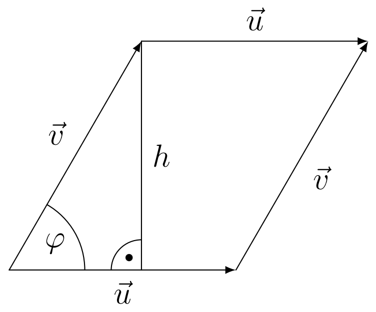
gilt

$$\|\vec{u}\times\vec{v}\| = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\sin\varphi,$$

wobei φ der Winkel zwischen $\vec{u}$ und $\vec{v}$ ist.

Flächeninhalt A des Parallelogramms zu $\vec{u}, \vec{v}$:
Wegen $h = \|\vec{v}\|\sin\varphi$ folgt

$$A = h\,\|\vec{u}\| = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\sin\varphi = \|\vec{u}\times\vec{v}\|.$$



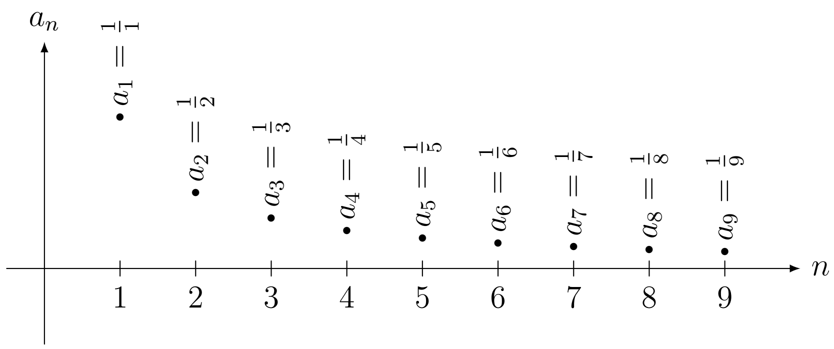
Kapitel 7

Konvergenz von Folgen

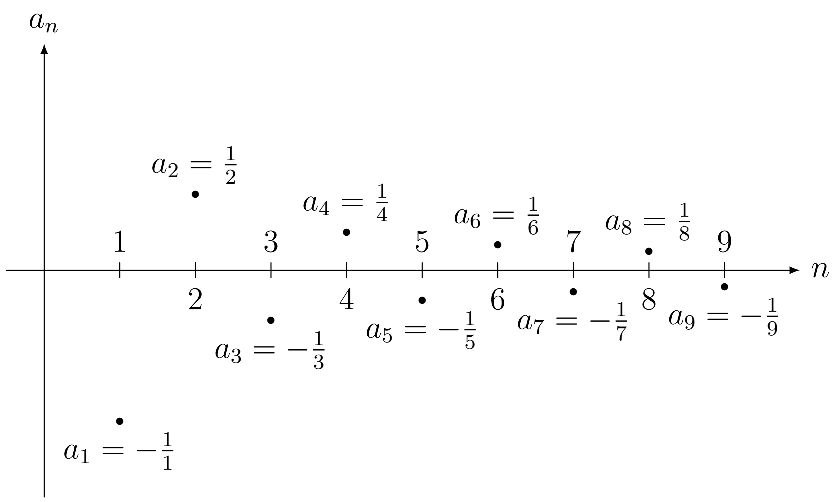
Eine *Folge* $(a_n)_{n\geq 1} = (a_1, a_2, \dots)$ ordnet jeder natürlichen Zahl n eine reelle Zahl zu. Dabei heißt a_n das n-te Folgenglied.

Konvergenz: $(a_n)_{n\geq 1}$ nähert sich einer Zahl $a \in \mathbb{R}$ (dem *Grenzwert*) immer mehr an.

Beispiel: Die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n = \frac{1}{n}$ nähert sich dem Grenzwert 0 an.



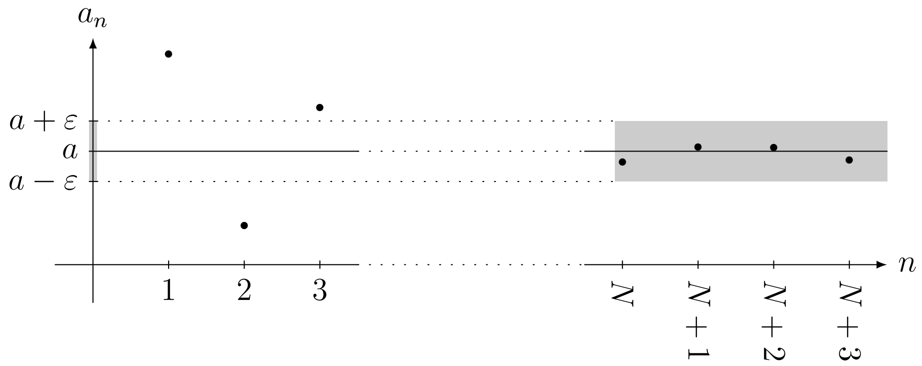
Beispiel: Die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ nähert sich dem Grenzwert 0 an.



Beispiel: Die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n = 10^{-n}$ nähert sich dem Grenzwert 0 an.

Formale Definition der Konvergenz: Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ heißt *konvergent* gegen den Grenzwert $a \in \mathbb{R}$ (oder *konvergiert* gegen a), wenn folgendes gilt:

> Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ für alle $n \geq N$ gilt.



Alternative Formulierung für $a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$:

> Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ gilt.

Schreibweise: $a_n \to a$ für $n \to \infty$ oder $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Unendliche Summen und unendliche Produkte: Es sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge. Die *n-te Partialsumme* von $(a_n)_{n\geq 1}$ ist

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + \cdots + a_n.$$

Das *n-te Partialprodukt* von $(a_n)_{n\geq 1}$ ist

$$p_n = \prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \cdots a_n.$$

Wir schreiben

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s,$$

falls die Folge $(s_n)_{n\geq 1}$ der Partialsummen gegen s konvergiert, und wir schreiben

$$\prod_{k=1}^{\infty} a_k = p,$$

falls die Folge $(p_n)_{n\geq 1}$ der Partialprodukte gegen p konvergiert.

Beispiel: Es sei $a_n = 10^{-n}$, dann ist die n-te Partialsumme gleich

$$s_n = \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \cdots + \frac{1}{10^n} = 0.1 + 0.01 + \cdots + 0.0\ldots01 = 0.\underbrace{1\ldots1}_{n \text{ mal}}.$$

Damit:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^n} = 0.\overline{1} = \frac{1}{9}.$$

Basler Problem: (Euler)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Vieta-Produkt:

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2} \cdots$$

Zu Erinnerung:

$$\begin{aligned}
\cos(\tfrac{\pi}{4}) &= \frac{\sqrt{2}}{2}, \\
\cos(\tfrac{\pi}{8}) &= \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, \\
\cos(\tfrac{\pi}{16}) &= \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}, \\
\cos(\tfrac{\pi}{32}) &= \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2}, \\
&\dots
\end{aligned}$$

Also

$$\frac{2}{\pi} = \prod_{k=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2^{k+1}}\right).$$

Verträglichkeit von Grenzwertbildung und Funktionsanwendung: Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Eine wünschenswerte Eigenschaft von f ist die Verträglichkeit mit der Grenzwertbildung:

$$f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(a_n)$$

für alle konvergenten Folgen $(a_n)_{n\geq 1}$. In diesem Fall heißt f *stetig*.

Kapitel 8

Ableitungen

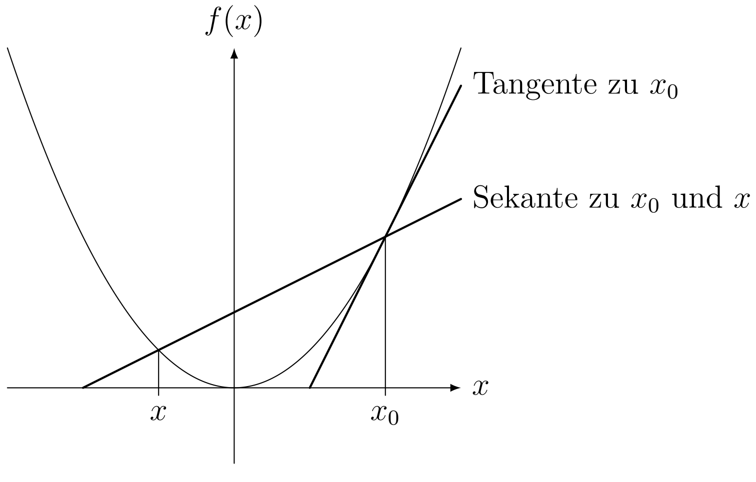
Die Aufgabe der Differenzialrechnung ist die Bestimmung der Tangente in einem Punkt des Funktionsgraphen einer Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dazu genügt es die Steigung der Tangente zu bestimmen.

Beispiel: Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ und es sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Die Sekante

$$\text{Steigung der Sekante} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = x + x_0.$$

Die Steigung der Tangente sollte sich durch das Einsetzen von $x = x_0$ ergeben:

$$\text{Steigung der Tangente} = x_0 + x_0 = 2x_0.$$



Definition der Ableitung: Die *Ableitung* $f'(x_0)$ oder $\frac{df}{dx}(x_0)$ an der Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ ist

$$f'(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}\,,$$

sofern der Grenzwert für beliebige Folgen $(x_n)_{n\geq 1}$ mit $x_n \to x_0$ und $x_n \neq x_0$ existiert und immer dasselbe Ergebnis liefert. In diesem Fall heißt f in x_0 *differenzierbar*.

Höhere Ableitungen:

$$\begin{aligned} &f''(x_0), \quad f'''(x_0), \ldots, \quad f^{(n)}(x_0) \qquad \text{beziehungsweise} \\ &\frac{d^2 f}{dx^2}(x_0), \ \frac{d^3 f}{dx^3}(x_0), \ldots, \ \frac{d^n f}{dx^n}(x_0). \end{aligned}$$

und $f^{(0)}(x_0) = \frac{d^0 f}{dx^0}(x_0) = f(x_0)$.

Rechenregeln: Es seien f und g differenzierbare Funktionen und es seien $a, b \in \mathbb{R}$, dann gilt:

- Linearität: $(af + bg)' = af' + bg'$.
- Produktregel: $(fg)' = f'g + fg'$.
- Quotientenregel: $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.
- Kettenregel: $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$.
  Dabei heißt $f'(g(x))$ die äußere Ableitung und $g'(x)$ die innere Ableitung.

Ableitungen von speziellen Funktionen:

- $(x^r)' = rx^{r-1}$ für $r \neq 0$.
- $(e^x)' = e^x$ und $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.
- $(\sin x)' = \cos x$ und $(\cos x)' = -\sin x$.

Beispiele:

- $(3x^3 + 4x^4)' = 3(x^3)' + 4(x^4)' = 3 \cdot 3x^2 + 4 \cdot 4x^3 = 9x^2 + 16x^3$.
- $(\sqrt{x^2 + 1})' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.
- $(\tan x)' = (\frac{\sin x}{\cos x})' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{(\cos x)^2} = \frac{(\cos x)^2 + (\sin x)^2}{(\cos x)^2} = \frac{1}{(\cos x)^2}$.
- $(e^{\cos x})' = e^{\cos x} \cdot (-\sin x) = -e^{\cos x} \sin x$.
- $(x^x)' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x}(\ln x + \frac{x}{x}) = x^x + x^x \ln x$.

Berechnung von Extremwerten: Ist f differenzierbar und ist x_0 ein lokales Extremum, dann gilt $f'(x_0) = 0$. Die Umkehrung ist im Allgemeinen falsch!

Beispiel: Für die Funktion $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3$ gilt $f'(0) = 0$, aber $x_0 = 0$ ist kein lokales Extremum.

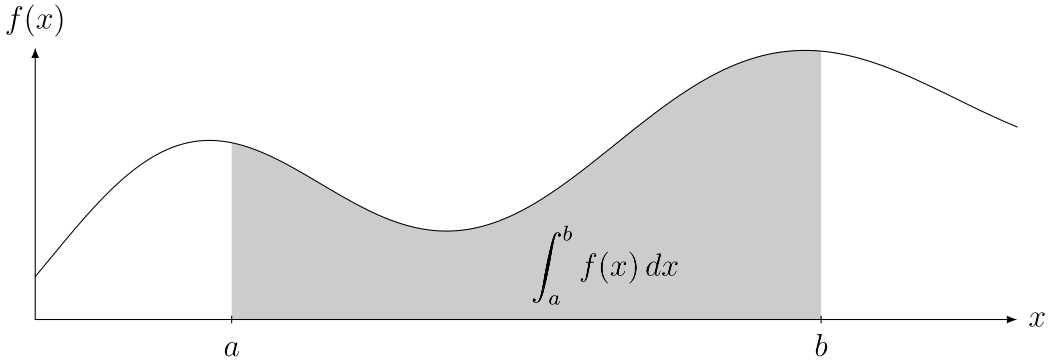
Monotonie und Konvexität: Es sei $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

- Gilt $f'(x) \geq 0$ (beziehungsweise $f'(x) \leq 0$) für alle $x \in (a, b)$, dann ist f auf dem Intervall (a, b) monoton wachsend (beziehungsweise monoton fallend).
- Gilt $f''(x) \geq 0$ (beziehungsweise $f'(x) \leq 0$) für alle $x \in (a, b)$, dann ist f auf dem Intervall (a, b) konvex (beziehungsweise konkav).

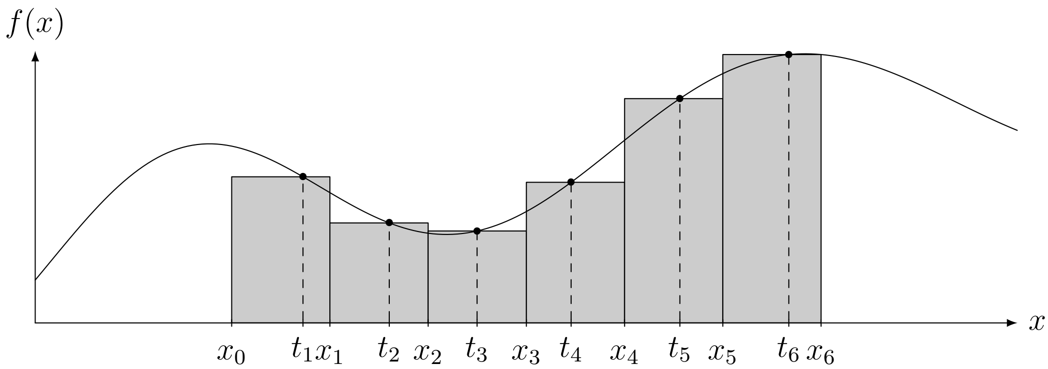
Kapitel 9

Integration

Die Aufgabe der Integralrechnung ist die Bestimmung der Fläche zwischen einer Funktion und der x-Achse. Dazu sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und es sei $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall.



Definition mithilfe von Riemann-Summen: Der Flächeninhalt zwischen Funktion und x-Achse wird mithilfe von schmalen Rechtecken approximiert. Dazu sei $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ eine Zerlegung von $[a, b]$ in n Teilintervalle. Außerdem sei $t_1 \in [x_0, x_1]$, $t_2 \in [x_1, x_2], \ldots, t_n \in [x_{n-1}, x_n]$.



Die Summe der Rechtecksflächeninhalte ist die *Riemann-Summe*

$$\sum_{k=1}^{n} f(t_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Ist der Grenzübergang, bei dem die Zerlegung immer feiner wird, erlaubt, dann heißt der Grenzwert der Riemann-Summen das *Integral* $\int_a^b f(x)\,dx$ von f auf dem Intervall $[a, b]$.

Stammfunktion: Eine Funktion $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *Stammfunktion* von $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, wenn $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Sind F_1 und F_2 zwei Stammfunktionen von f, dann gibt es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ so, dass $F_2(x) = F_1(x) + c$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

- Ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und ist $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch
$$F(t) = \int_a^t f(x)\,dx$$
gegeben, wobei $a \in \mathbb{R}$ beliebig ist, dann ist F eine Stammfunktion von f.
- Ist F eine Stammfunktion der stetigen Funktion f, dann gilt
$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$
für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.

Rechenregeln: Es seien f, g stetige Funktionen und $\alpha, \beta, a, b \in \mathbb{R}$.

- **Linearität:**
$$\int \alpha f(x) + \beta g(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx,$$
$$\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx.$$
- **Partielle Integration:**
$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx,$$
$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_{x=a}^{b} - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$
Denn aufgrund der Produktregel gilt
$$f(x)g(x) + C = \int (f(x)g(x))'\,dx = \int f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\,dx.$$
- **Substitution:** Es sei $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ "schön".
$$\int f(u(t))u'(t)dt = \left[\int f(x)\,dx\right]_{x=u(t)},$$
$$\int_a^b f(u(t))u'(t)dt = \int_{u(a)}^{u(b)} f(x)\,dx.$$
Denn aufgrund der Kettenregel gilt
$$\left[\int f(x)\,dx\right]_{x=u(t)} = F(u(t)) + C = \int \big(F(u(t))\big)'\,dt = \int F'(u(t))u'(t)\,dt,$$
wobei F eine Stammfunktion von f sei.

Integrale spezieller Funktionen: Unter Verwendung des Hauptsatzes gilt folgendes:

- $\int x^r \, dx = \frac{1}{r+1} x^{r+1} + C$ für $r \neq -1$.
- $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C$.
- $\int e^x \, dx = e^x + C$.
- $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$.
- $\int \cos x \, dx = \sin x + C$.

Beispiele:

- $\int \frac{1}{x^2} + \sqrt{x} \, dx$:

$$\int \frac{1}{x^2} + \sqrt{x} \, dx = \int x^{-2} + x^{1/2} \, dx = \frac{1}{-1} \cdot x^{-1} + \frac{1}{3/2} \cdot x^{3/2} + C = -\frac{1}{x} + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C.$$

- $\int \ln x \, dx$: Mithilfe von partieller Integration gilt

$$\int 1 \cdot \ln x \, dx = \begin{bmatrix} f'(x) = 1 & f(x) = x \\ g(x) = \ln x & g'(x) = \frac{1}{x} \end{bmatrix} = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = x \ln x - x + C.$$

- $\int xe^x \, dx$: Mithilfe von partieller Integration gilt

$$\int x \cdot e^x \, dx = \begin{bmatrix} f(x) = x & f'(x) = 1 \\ g'(x) = e^x & g(x) = e^x \end{bmatrix} = xe^x - \int e^x \, dx = xe^x - e^x + C.$$

- $\int \sqrt{2x+1} \, dx$: Mithilfe von Substitution gilt

$$\begin{aligned} \int \sqrt{2x+1} \, dx = \begin{bmatrix} u(x) = 2x+1 \\ \frac{du}{dx} = 2 \\ dx = \frac{1}{2} du \end{bmatrix} &= \int \sqrt{u} \cdot \frac{1}{2} \, du \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} u^{3/2} + C \overset{\text{Rücksubst.}}{=} \frac{1}{3}\sqrt{(2x+1)^3} + C. \end{aligned}$$

- $\int xe^{x^2} \, dx$: Mithilfe von Substitution gilt

$$\int xe^{x^2} \, dx = \begin{bmatrix} u(x) = x^2 \\ \frac{du}{dx} = 2x \\ xdx = \frac{1}{2} du \end{bmatrix} = \int e^u \cdot \frac{1}{2} \, du = \frac{1}{2} e^u + C \overset{\text{Rücksubst.}}{=} \frac{1}{2} e^{x^2} + C.$$

- $\int \sqrt{1-x^2} \, dx$: Wir suchen nach einer Substitution, so dass aus $1 - x^2$ ein Ausdruck der Form y^2 entsteht. Also $y^2 = 1 - x^2$ und $x^2 + y^2 = 1$. Letzteres ist die Kreisgleichung für den Kreis um den Ursprung mit Radius 1. Diesen Kreis können wir mithilfe von Kosinus und Sinus parametrisieren:

$$\{(x,y) \, : \, x^2 + y^2 = 1\} = \{(\cos\alpha, \sin\alpha) \, : \, \alpha \in [0, 2\pi)\}.$$

Daher verwenden wir die Substitution $x(\alpha) = \cos\alpha$:

$$\int \sqrt{1-x^2} \, dx = \begin{bmatrix} x(\alpha) = \cos\alpha \\ \frac{dx}{d\alpha} = -\sin\alpha \\ dx = -\sin\alpha d\alpha \end{bmatrix} = \int \sqrt{\underbrace{1 - (\cos\alpha)^2}_{=(\sin\alpha)^2}} \, (-\sin\alpha) \, d\alpha = -\int (\sin\alpha)^2 \, d\alpha.$$

Dieses unbestimmte Integral berechnen wir mithilfe von partieller Integration:

$$\int (\sin\alpha)^2\,d\alpha = \begin{bmatrix} f(\alpha) = \sin\alpha & f'(\alpha) = \cos\alpha \\ g'(\alpha) = \sin\alpha & g(x) = -\cos\alpha \end{bmatrix} = -\sin\alpha\cos\alpha + \int (\cos\alpha)^2\,d\alpha$$

$$= -\sin\alpha\cos\alpha + \int 1 - (\sin\alpha)^2\,d\alpha = -\sin\alpha\cos\alpha + \alpha - \int (\sin\alpha)^2\,d\alpha.$$

Daraus folgt

$$\int (\sin\alpha)^2\,d\alpha = \tfrac{1}{2}(\alpha - \sin\alpha\cos\alpha).$$

Durch Rücksubstitution erhalten wir schließlich

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = -\tfrac{1}{2}\arccos x + \tfrac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}.$$