Vortrag 3: Gleichungen und Lösungsmethoden

Aufgabe (Gleichungen I): Löse die Gleichungen

- $-41 + 26t = 2t + 20t + 19$
- $5(2 - x) = 11 - 4x$
- $\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} = 2$
- $\frac{2}{5}x - \frac{1}{5} = -\frac{4}{5} + \frac{8}{5}$
- $\frac{5}{8}x + \frac{3}{4} = \frac{7}{8}$
- $\frac{1}{2} + \frac{2}{3}x = \frac{5}{6}$

Aufgabe (Gleichungen II): Für keine der Gleichungen wird die Mitternachtsformel benötigt.

- $x \cdot (x - 2) = 0$
- $7x^2 + 3 = 3 + x$
- $1 + 9x^2 = -18x + 1$
- $x^2 = -2x$
- $(8x - 3) \cdot x = 13x$
- $(x - 1) \cdot x \cdot (x + 1) = 0$

Aufgabe (Gleichungen III): Welche der folgenden Gleichungen sind äquivalent?.

- $y = x + 5$
- $x = y - 5$
- $x^2 = (y - 5)^2$
- $13x = 13y - 65$
- $\frac{x}{y} = 5$

Aufgabe (Gleichungen IV): Löse die Gleichungen:

- $x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{9} = 0$
- $12x^2 - 6x - 90 = 0$
- $x^2 + \frac{19}{10}x + \frac{3}{5} = 0$

Aufgabe (Gleichungen V) : Löse die Gleichungen

- $\frac{40}{x-1} = 2x$
- $1 = \frac{7}{x} + \frac{98}{x^2}$
- $\frac{1}{x^2} = \frac{11x-30}{x^4}$
- $\frac{x^2}{4x-6} = \frac{x+10}{6x-9} - x$

Aufgabe (Gleichungen VI): Löse die folgenden Gleichungen und gib genau an welche Lösungen in den reellen Zahlen existieren.

- $0 = 4x^2 - 12x + 9$
- $0 = x^3 - 4x^2 + x + 6$
- $0 = x^5 + \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{8}x$
- $\frac{x}{x-3} + \frac{2x}{x-3} = \frac{1}{x-3} + \frac{x+3}{9-x^2}$
- $0 = x^3 + 2x^2 - x - 2$
- $\sqrt{6x+37} = x + 5$
- $\sqrt{2x^2} = \sqrt{x^2-1} - 1$

Aufgabe (Mitternachtsformel)

- Füge die fehlenden Schritte in den Beweis der ersten Form der Mitternachtsformel $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ ein und führe ihn zu Ende.

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 + px + q \mid \text{ setze } p = \star \\ &= x^2 + 2yx + q \mid \text{ setze } q = y^2 + c \\ &= x^2 + 2yx + y^2 + c \mid \ \ldots \\ &= (x+y)^2 + c \mid \ p = 2y \Leftrightarrow \heartsuit \\ &= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + c \mid \ldots \\ -\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 &= q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

- Beweise die zweite Form der Mitternachtsformel aus dem Vortrag:

  Die Lösungen einer quadratische Gleichung der Form: $0 = ax^2 + bx + c$ lauten: $x_{1,2} = -\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Aufgabe (Satz von Vieta)

Satz von Vieta: Sei $0 = x^2 + px + q$ gegeben, dann sind x_1 und x_2 genau dann Lösungen der Gleichung wenn sie: $x_1 + x_2 = -p$ und $x_1 \cdot x_2 = q$ erfüllen.

Konstruiere selbst eine Gleichung, die sich geschickt durch den Satz von Vieta lösen lässt. Begründe deine Wahl, berechne die Lösungen und prüfe dein Ergebnis mit einer anderen Lösungsmethode. Schaffst Du es den Satz zu beweisen? (*Tipp:* Du benötigst dafür nur eine Aussage, die wir bereits im Vortrag definiert haben.)

Aufgabe (Quadratische Gleichungen)

Gegeben ist die Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$. Begründe, dass wenn a und c unterschiedliche Vorzeichen haben, dann hat die Gleichung zwei Lösungen. Zeige mit einem Gegenbeispiel, dass die Umkehrung des Satzes nicht gilt.