

Vortrag 3: Die Exponentialfunktionen und verschiedenen Anwendungen

Aufgabe (Ableitungen von Exponentialfunktionen I)

Berechne die folgenden Ableitungen:

- $a(x) = 3^x$
- $b(x) = e^x + 3$
- $c(x) = \frac{4}{x^3} + 5^x + 2$
- $d(x) = \sqrt[5]{x^6}$
- $f(x) = e^{(2\ln(x))}$

Aufgabe (Ableitungen von Exponentialfunktionen II)

Löse die Gleichung $f(x) = 7$ und leite f ab.

- $f(x) = 5^x$
- $f(x) = 4 + 2^x$
- $f(x) = 8 \cdot 5^x - 25^x$
- $f(x) = 49^{x^2 - 0,5x}$

Aufgabe (Wachstum I)

Frische Vollmilch enthält 1 mg Vitamin C pro 100ml. Dieses zersetzt sich unter dem Einfluss von Licht. In einer farblosen Glasflasche nimmt der Vitamin-C-Gehalt stündlich um 5 % ab, in einer braunen Flasche um 2% . Beschreibe den zeitlichen Ablauf des Vitamin-C-Gehalts in einer 500ml Flasche für beide Fälle durch Funktionen.

Aufgabe (Wachstum II)

Ein Stein sinkt in einem See. Für seine Sinkgeschwindigkeit gilt $v(t) = 2,5(1 - e^{-0,1t})$ (t in Sekunden, $v(t)$ in $\frac{m}{s}$)

- Bestimme die Sinkgeschwindigkeit des Steins nach 10 Sekunden
- Nach welcher Zeit sinkt der Stein mit der Geschwindigkeit $2\frac{m}{s}$
- Zeige, dass die Geschwindigkeit des Steins ständig zunimmt
- Welche Geschwindigkeit erreicht der Stein langfristig?

Aufgabe (Wachstum III)

Einem Patient wird vor einer langwierigen Operation ein Medikament für die Vollnarkose injiziert, das mit einer Halbwertszeit von 50 min abgebaut wird.

- Ein Patient erhält 30 Minuten vor der Operation 5 mg dieses Medikaments. Welche Menge ist bei Operationsbeginn noch vorhanden?
- Eine Stunde nach der ersten Injektion erhält der Patient eine zweite Dosis von 5 mg. Er beginnt aufzuwachen, wenn höchstens noch 1 mg dieses Medikaments im Körper vorhanden ist. Wann ist dies der Fall?

Aufgabe (Wachstum IV)

Ein Bestand f nimmt exponentiell zu. Beweise, dass sich innerhalb der Verdopplungszeit T_V nicht nur der Anfangsbestand $f(0)$, sondern auch jeder andere Bestand $f(t)$ verdoppelt.

Aufgabe (lokale Extrema)

- Bestimme die lokalen Extremstellen der Funktion f mit $f(x) = \frac{e^x}{x}$
- Besitzt der Graph von f einen Sattelpunkt?

Aufgabe (proportionales Wachstum)

Zeige, dass für jede Funktion f mit $f(t) = a \cdot e^{k \cdot t}$ die einen exponentiellen Wachstumsprozess beschreibt gilt:

$$f'(t) = k \cdot f(t)$$

Interpretiere die Aussage.

Aufgabe (Umrechnungsformel zum log)

Für Logarithmen mit verschiedenen Basen a und c gilt folgenden Umrechnungsregel:

$$\log_a(u) = \frac{\log_c(u)}{\log_c(a)}$$

Versuche sie zu allgemein beweisen.