

# Algorithmen der Linearen Algebra

Thomas Markwig

Fachbereich Mathematik  
Eberhard Karls Universität Tübingen

September 2022

# Webseite der Vorlesung

[http://www.math.uni-tuebingen.de/~keilen/Lehre/SS22/  
algss22de.html](http://www.math.uni-tuebingen.de/~keilen/Lehre/SS22/algss22de.html)

# Ziel des Kurses

- ▶ Lerne grundlegende Strukturen von Programmiersprachen kennen
- ▶ Wende diese an, um mathematische Algorithmen in einer Programmiersprache zu implementieren
- ▶ Lerne, wie man Fehler in Programmen systematisch finden kann (Debugging)
- ▶ Methode: Learning by doing
  - ▶ Jeder bearbeitet die Aufgaben im eigenen Tempo.
  - ▶ Jeder bearbeitet so viele Aufgaben, wie er kann.
  - ▶ Keine Mindestanzahl an Aufgaben erforderlich.
  - ▶ Studienleistung = die im Kurses erstellte Bibliothek

# Verwendete Software

- ▶ Computeralgebrasystem SINGULAR
- ▶ Spezialisiert auf Rechnungen in und über Polynomringen
- ▶ Open Source, d.h. u.a. Download und Nutzung kostenlos
- ▶ Plattformen: Linux, Windows, OSX
- ▶ Webseite: <http://www.singular.uni-kl.de>
- ▶ Anwendungsgebiete:
  - ▶ (Nicht-)Kommutative Algebra
  - ▶ Algebraische Geometrie
  - ▶ Singularitätentheorie

# SINGULAR-Installation unter Windows (mit WSL)

- 1) Installiere WSL (Ubuntu) aus dem Microsoft Store
- 2) Starte anschließend Ubuntu (Icon auf dem Desktop) und folge den Anweisungen (z.B. Benutzerkonto anlegen)
- 3) Installiere SINGULAR auf Ubuntu
  - ▶ `sudo apt-get update`
  - ▶ `sudo apt-get install singular`
- 4) Zum Starten von Singular
  - ▶ Starte jeweils Ubuntu und gib Singular ein.
- 5) Einige Hinweise
  - ▶ Das Windows-Hauptverzeichnis findet man unter `/mnt/c`.
  - ▶ Das Ubuntu-Hauptverzeichnis findet man im Explorer durch Eingabe von `\\wsl$`.
  - ▶ Öffne im Windows-Explorer in ein Verzeichnis, drücke Shift und die rechte Maustaste, um eine Linux-Shell in diesem Verzeichnis starten.

# SINGULAR-Installation unter Windows (mit Cygwin)

- 1) Installiere Cygwin mit Standardeinstellung:  
[https://cygwin.com/setup-x86\\_64.exe](https://cygwin.com/setup-x86_64.exe)
  - ▶ Wähle beim Installieren Full aus und installiere wget
- 2) Speichere `ftp:`  
[//jim.mathematik.uni-kl.de/repo/cygwin/x86/singular-4.3.1.tar.xz](ftp://jim.mathematik.uni-kl.de/repo/cygwin/x86/singular-4.3.1.tar.xz) in  
C:\cygwin
- 3) Starte Cygwin und gib folgendes im Terminal ein:
  - ▶ `cd /`
  - ▶ `tar Jxf singular-4.3.1.tar.xz`
- 4) Starte `setup-x86` (Cygwin-setup) erneut
  - ▶ Wähle Full aus und suche nach emacs
  - ▶ Installiere alle Emacs-Pakete nach
- 5) Unter Cygwin mit `ln` einen Link auf die SINGULAR-Bibliothek unter `/cygdrive/c/...` setzen.

# SINGULAR starten und beenden

- ▶ SINGULAR läuft grundsätzlich in einem Terminal (Windows: Ubuntu oder Cygwin-Terminal)
- ▶ Starten mit dem Befehl: Singular
- ▶ Beenden mit einem der Befehle:
  - ▶ `quit;`
  - ▶ `exit;`
  - ▶ `$`
- ▶ Jeder Befehl in SINGULAR schließt mit Semikolon ab.
- ▶ Neue Kommandozeile beginnt immer mit `>`.
- ▶ Nicht abgeschlossene Kommandozeile beginnt mit einem Punkt.

# Einfaches SINGULAR-Beispiel

## SINGULAR

A Computer Algebra System for Polynomial Computations

by: W. Decker, G.-M. Greuel, G. Pfister, H. Schoenemann  
FB Mathematik der Universitaet, D-67653 Kaiserslautern

```
> 2+3;
```

```
5
```

```
> 2+3+
```

```
. 7*5;
```

```
40
```

```
> $
```

```
$Bye.
```

# Wie bekomme ich Hilfe?

- ▶ Webseite von SINGULAR <http://www.singular.uni-kl.de>
- ▶ Online Manual -> Index
- ▶ Online Manual -> Libraries

# SINGULAR unterbrechen

- ▶ CTRL-C unterbricht SINGULAR
  - ▶ r : bricht die aktuelle Rechnung sofort ab
  - ▶ c : führt die aktuelle Rechnung weiter
  - ▶ q : bricht SINGULAR ab

# Einfaches SINGULAR-Beispiel

## SINGULAR

A Computer Algebra System for Polynomial Computations

by: W. Decker, G.-M. Greuel, G. Pfister, H. Schoenemann  
FB Mathematik der Universitaet, D-67653 Kaiserslautern  
> for (int i=1;i<=10;i++){i=i-1;}

```
^C// ** Interrupt at cmd: '$INVALID$' in line: 'i=i-1;'  
abort after this command(a), abort immediately(r),  
print backtrace(b), continue(c) or quit Singular(q) ?q
```

halt 2

## Nach dem Starten – Ring festlegen

- ▶ Nach Start: Ring definieren, über dem gearbeitet werden soll.
- ▶ Damit legt man auch den Zahlbereich fest:
  - ▶ z.B.  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z}_2$ ,  $\mathbb{F}_8$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{Q}[i]$ , etc.
- ▶ Beispiele:
  - ▶ `ring r=0,t,lp;`  
Polynomring  $\mathbb{Q}[t]$ , Variable  $t$ , Koeffizienten in  $\mathbb{Q}$
  - ▶ `ring r=(real,15),x,lp;`  
Polynomring  $\mathbb{R}[x]$ , Variable  $x$ , Koeffizienten in  $\mathbb{R}$  -  
Rechnung mit 15 Nachkommastellen
  - ▶ `ring r=5,(x,y),lp;`  
Polynomring  $\mathbb{F}_5[x,y]$ , Variablen  $x, y$ , Koeffizienten in  $\mathbb{F}_5$

## Variablen in SINGULAR

- ▶ Vor Nutzung muss der Typ einer Variablen festgelegt werden.
- ▶ Syntax: `typ Variablenname (= Variablenwert);`
- ▶ Typen von Variablen:
  - ▶ `int i=1;` ganze Zahl(integer)
  - ▶ `string s="Hallo";` Zeichenkette
  - ▶ `intvec iv=1,2,3,4;` Integervektor
  - ▶ `intmat im[2][3]=1,2,3,4,5,6;` Integermatrix

## Variablen in SINGULAR

- ▶ Vor Nutzung muss der Typ einer Variablen festgelegt werden.
- ▶ Syntax: `typ Variablenname (= Variablenwert);`
- ▶ Typen von Variablen:
  - ▶ `int i=1;` ganze Zahl(integer)
  - ▶ `string s="Hallo";` Zeichenkette
  - ▶ `intvec iv=1,2,3,4;` Integervektor
  - ▶ `intmat im[2][3]=1,2,3,4,5,6;` Integermatrix
  - ▶ `ring R=0,t,lp;` Ring
  - ▶ `number n=4/6;` Zahl  $\frac{4}{6}$  im Zahlbereich
  - ▶ `list L=n,iv,s;` Liste
  - ▶ `matrix M[2][3]=1,2,3,4,5,6;` Matrix von Polynomen
  - ▶ `vector v=[1,2,3];` Vektor von Polynomen

## Variablen in SINGULAR

- ▶ Vor Nutzung muss der Typ einer Variablen festgelegt werden.
- ▶ Syntax: `typ Variablenname (= Variablenwert);`
- ▶ Typen von Variablen:
  - ▶ `int i=1;` ganze Zahl(integer)
  - ▶ `string s="Hallo";` Zeichenkette
  - ▶ `intvec iv=1,2,3,4;` Integervektor
  - ▶ `intmat im[2][3]=1,2,3,4,5,6;` Integermatrix
  - ▶ `poly f=t2+5t+1;` Polynom
  - ▶ `ideal I=f,t3;` Ideal
  - ▶ `qring Q=std(I);` Faktorring  $R/I$
  - ▶ `map g=R,t+1;` Abbildung  $f : R \longrightarrow Q : t \mapsto t + 1$
  - ▶ `proc` Prozedur

# Einfaches Beispiel

## SINGULAR

A Computer Algebra System for Polynomial Computations

by: W. Decker, G.-M. Greuel, G. Pfister, H. Schoenemann  
FB Mathematik der Universitaet, D-67653 Kaiserslautern

```
> ring R=0,t,lp;  
> ideal I=t5+t;  
> poly f=t2+1;  
> qring Q=std(I);  
> map g=R,t2;  
> g(f);  
t4+1  
>
```

## Einfaches Beispiel

```
> ring R=0,t,lp;
> poly f=t2+1;
> string S="Mathematik";
> int i=3;
> list L;
> L=f,S,i;
> L;
[1]:
  t2+1
[2]:
  Mathematik
[3]:
  3
>
```

## Einfaches Beispiel

```
> intmat M[2][3]=1,2,3,4,5,6;  
> intmat N[3][4]=1,0,1,0, 0,1,0,1, 1,1,1,1;  
> print(M*N);  
      4      5      4      5  
    10     11     10     11  
>
```

# Zuweisungen

- ▶ Zuweisungsoperator ist das Gleichheitszeichen =

- ▶ Beispiel:

```
> int k=1;
```

```
> int j;
```

```
> j=k+4;
```

```
> j;
```

```
5
```

```
>
```

# Schleifen

## ▶ for-Schleife

```
> int i,s;  
> for (i=1;i<=10;i++)  
  . {  
  .   s=s+i;  
  . }  
> s;  
55
```

## ▶ while-Schleife

```
> int i,s;  
> while (i<=10)  
  . {  
  .   s=s+i;  
  .   i++;  
  . }  
> s;  
55
```

## ▶ break; : bricht eine Schleife ab

# Verzweigungen

- ▶ Verzweigung mittels der if-else-Anweisung:

```
> int i=10;
> int s=7;
> if (i<5 or s<10)
. {
.     s=5;
. }
. else
. {
.     s=0;
. }
> s;
5
```

- ▶ Der else-Anteil kann fehlen.

# Vergleichsoperatoren

- ▶ `<` — ist echt kleiner als
- ▶ `>` — ist echt größer als
- ▶ `<=` — ist kleiner als oder gleich
- ▶ `>=` — ist größer als oder gleich
- ▶ `==` — ist gleich
- ▶ `!=` — ist ungleich
- ▶ `<>` — ist ungleich
- ▶ Das Ergebnis ist ein boolescher Ausdruck:
  - ▶ `wahr` hat den Wert 1 (vom Typ `int`)
  - ▶ `falsch` hat den Wert 0 (vom Typ `int`)

# Prozeduren in SINGULAR

- ▶ Datentyp `proc` erlaubt, Funktionen selbst zu schreiben
- ▶ Syntax:

```
proc Prozedurname (Parameterliste)
{
    Prozedurkörper
}
```

## Ein einfaches Beispiel

```
> proc permcol (matrix A, int c1, int c2)
. {
.   matrix B=A;
.   B[1..nrows(B),c1]=A[1..nrows(A),c2];
.   B[1..nrows(B),c2]=A[1..nrows(A),c1];
.   return(B);
. }
> ring r=0,(x),lp;
> matrix A[3][3]=1,2,3,4,5,6,7,8,9;
> print(A);
1,2,3,
4,5,6,
7,8,9
> print(permcol(A,1,2));
2,1,3,
5,4,6,
8,7,9
```

# Bibliotheken in SINGULAR

- ▶ Bibliotheken erlauben, Prozeduren zu speichern und durch Laden der Bibliothek in SINGULAR aufrufbar zu machen
- ▶ Laden der Bibliothek in SINGULAR :  
LIB "Bibliotheksname (ggf. mit Pfad)";
- ▶ Eine Bibliothek ist eine reine Textdatei, in der die Prozeduren hintereinander aufgelistet sind.
- ▶ Bestimmte Syntax-Merkmale werden dabei empfohlen (siehe folgende Folien).
- ▶ Jeder Teilnehmer soll eine eigene Bibliothek anlegen, in die er alle Prozeduren des Kurses einträgt:

nachname-vorname.lib

Z.B.: markwig-thomas.lib

# Bibliotheken in SINGULAR – Bibliothekskopf

```
////////////////////////////////////  
version="1.0";  
  
info="  
  LIBRARY: markwig.lib  Algorithmen der Linearen Algebra  
  
  AUTHOR:  Thomas Markwig, thomas.markwig@uni-tuebingen.de  
  
  PROCEDURES:  
    permcol(matrix,int,int)  vertauscht Spalten der Matrix  
    permrow(matrix,int,int)  vertauscht Zeilen der Matrix  
";  
////////////////////////////////////  
LIB "inout.lib";  
////////////////////////////////////
```

## Bibliotheken in SINGULAR – Prozeduren

```
proc permcol (matrix A, int c1, int c2)
"USAGE:  permcol(A,c1,c2); A matrix, c1,c2 positive integers
RETURN:  matrix, A being modified by permuting column c1 and c2
NOTE:    Platz für wichtige Anmerkungen,
         auch über mehrere Zeilen gestreckt
EXAMPLE: example permcol; shows an example"
{
  matrix B=A;
  B[1..nrows(B),c1]=A[1..nrows(A),c2];
  B[1..nrows(B),c2]=A[1..nrows(A),c1];
  return(B);
}
example
{
  "EXAMPLE:";
  echo = 2;
  ring r=0,(x),lp;
  matrix A[3][3]=1,2,3,4,5,6,7,8,9;
  print(A);
  print(permcol(A,2,3));
}
```

## Debugging in SINGULAR – die Tilde ~

- ▶ Beim Schreiben einer Prozedur macht man Fehler.
- ▶ SINGULAR zeigt dies, indem
  - ▶ die Bibliothek nicht mehr geladen wird,
  - ▶ die Prozedur beim Durchlauf eine Fehlermeldung liefert,
  - ▶ die Prozedur ein falsches Ergebnis liefert.
- ▶ In den beiden ersten Fällen gibt SINGULAR Hinweis auf die fehlerhafte Zeile.
- ▶ In den beiden letzten Fällen helfen `break points`:
  - ▶ Füge in der Prozedur eine Leerzeile mit einer Tilde (~) ein.
  - ▶ Beim Durchlauf hält SINGULAR an der Stelle an und man kann sich alle Variablenwerte anzeigen lassen.
  - ▶ Das hilft, den Fehler zu lokalisieren.

## Probleme beim Debugging

- ▶ SINGULAR mittels ~ unterbrochen und dann ...
- ▶ ... eine fehlerhafte Abfrage eingegeben:

```
-- break point in keilen.lib::ONB --  
-- called from keilen.lib::ONB --  
-- called from keilen.lib::ONB --  
-- called from STDIN --  
B=M;  
  ? 'B' is undefined  
  ? error occurred in or before keilen.lib::ONB line 2596  
(keilen.lib::ONB,2598) >>;~<<  
breakpoint 0 (press ? for list of commands)  
>>
```

- ▶ Dann muss man den Befehl q; eingeben!

## ESingular + emacs

- ▶ Statt Singular kann man auch **ESingular** starten.
- ▶ SINGULAR wird dann im **Editor Emacs** gestartet.
- ▶ Man kann SINGULAR dort ganz normal nutzen.
- ▶ Aber man hat zusätzlich einen Editor zum Schreiben der Bibliothek.
- ▶ emacs bietet hilfreiches Highlighting und Einrücken!
- ▶ Automatisches Einrücken:
  - ▶ Region markieren
  - ▶ `Esc-x indent-region`

# Editor Visual Studio Code

- ▶ Editor **Visual Studio Code** liefert Highlighting, Einrücken, etc.
- ▶ Für Linux, Windows und OSX:

<https://code.visualstudio.com>

- ▶ Installieren und dann Syntax auf C++ stellen

Fußleiste: Plain Text umstellen auf C++

# Editor sublime text

- ▶ Editor `sublime text` liefert Highlighting, Einrücken, etc.
- ▶ Für Linux, Windows und OSX:

<https://www.sublimetext.com>

- ▶ Installieren und dann Syntax auf C++ stellen

Tools -> Command Palette -> Set Syntax C++

# Erste Algorithmen und Prozeduren

## Aufgabe

Formuliere einen Algorithmus, der das Minimum zweier ganzer Zahlen berechnet.

# Erste Algorithmen und Prozeduren

## Aufgabe

Formuliere einen Algorithmus, der das Minimum zweier ganzer Zahlen berechnet.

## Algorithmus

**Input**  $m, n$  zwei ganze Zahlen

**Output**  $\min\{m, n\}$

**Instructions**

# Erste Algorithmen und Prozeduren

## Aufgabe

Formuliere einen Algorithmus, der das Minimum zweier ganzer Zahlen berechnet.

## Algorithmus

**Input**  $m, n$  zwei ganze Zahlen

**Output**  $\min\{m, n\}$

## Instructions

- ▶ Wenn  $m > n$ :
  - ▶ Dann gib  $n$  zurück.
  - ▶ Sonst gib  $m$  zurück.

# Erste Algorithmen und Prozeduren

## Aufgabe

Schreibe eine SINGULAR-Prozedur, die zwei ganze Zahlen einliest und ihr Minimum ausgibt.

## Algorithmus

**Input**  $m, n$  zwei ganze Zahlen

**Output**  $\min\{m, n\}$

### Instructions

- ▶ Wenn  $m > n$ :
  - ▶ Dann gib  $n$  zurück.
  - ▶ Sonst gib  $m$  zurück.

# Erste Algorithmen und Prozeduren

## Aufgabe

Schreibe eine SINGULAR-Prozedur, die zwei ganze Zahlen einliest und ihr Minimum ausgibt.

## Algorithmus

**Input**  $m, n$  zwei ganze Zahlen

**Output**  $\min\{m, n\}$

### Instructions

- ▶ Wenn  $m > n$ :
  - ▶ Dann gib  $n$  zurück.
  - ▶ Sonst gib  $m$  zurück.

```
proc minimum (int m, int n)
{
  if (m > n)
  {
    return(n);
  }
  else
  {
    return(m);
  }
}
```

# Quadratsumme

## Aufgabe

Schreibe eine SINGULAR-Prozedur, die die Summe der ersten  $n$  Quadratzahlen berechnet.

# Quadratsumme

## Aufgabe

Schreibe eine SINGULAR-Prozedur, die die Summe der ersten  $n$  Quadratzahlen berechnet.

## Algorithmus

**Input**  $n$  eine ganze Zahl

**Output**  $\sum_{i=1}^n i^2$

**Instructions**

# Quadratsumme

## Aufgabe

Schreibe eine SINGULAR-Prozedur, die die Summe der ersten  $n$  Quadratzahlen berechnet.

## Algorithmus

**Input**  $n$  eine ganze Zahl

**Output**  $\sum_{i=1}^n i^2$

### Instructions

- ▶ Setze  $s = 0$ .
- ▶ Für  $i = 1$  bis  $n$ :
  - ▶ Setze  $s = s + i \cdot i$ .
- ▶ Gib  $s$  zurück

# Quadratsumme

## Aufgabe

Schreibe eine SINGULAR-Prozedur, die die Summe der ersten  $n$  Quadratzahlen berechnet.

## Algorithmus

**Input**  $n$  eine ganze Zahl

**Output**  $\sum_{i=1}^n i^2$

### Instructions

- ▶ Setze  $s = 0$ .
- ▶ Für  $i = 1$  bis  $n$ :
  - ▶ Setze  $s = s + i \cdot i$ .
- ▶ Gib  $s$  zurück

```
proc quadratsumme (int n)
{
  int s = 0;
  for (int i=1;i<=n;i++)
  {
    s = s + i*i;
  }
  return (s);
}
```

# Rekursive Algorithmen

- ▶ Ein Algorithmus heißt **rekursiv**, wenn er sich selbst wieder aufruft.
- ▶ Oft lassen sich Algorithmen in rekursiver Form einfacher formulieren.

# Quadratsumme (rekursiv)

## Aufgabe

Schreibe eine rekursive SINGULAR-Prozedur, die die Summe der ersten  $n$  Quadratzahlen berechnet.

## Algorithmus

**Input**  $n$  eine ganze Zahl

**Output**  $\sum_{i=1}^n i^2$

### Instructions

- ▶ Wenn  $n = 1$ :
  - ▶ Gib 1 zurück.
- ▶ Sonst:
  - ▶ Wende den Algorithmus auf  $n - 1$  an, addiere  $n^2$  und gib das Ergebnis zurück.

# Quadratsumme (rekursiv)

## Aufgabe

Schreibe eine rekursive SINGULAR-Prozedur, die die Summe der ersten  $n$  Quadratzahlen berechnet.

## Algorithmus

**Input**  $n$  eine ganze Zahl

**Output**  $\sum_{i=1}^n i^2$

### Instructions

- ▶ Wenn  $n = 1$ :
  - ▶ Gib 1 zurück.
- ▶ Sonst:
  - ▶ Wende den Algorithmus auf  $n - 1$  an, addiere  $n^2$  und gib das Ergebnis zurück.

```
proc qs (int n)
{
  if (n == 1)
  {
    return(1);
  }
  else
  {
    return(n*n+qs(n-1));
  }
}
```

# Binomialkoeffizienten

## Algorithmus

**Input**  $n, k$  zwei ganze Zahlen

**Output**  $\binom{n}{k}$

**Instructions**

# Binomialkoeffizienten

## Algorithmus

**Input**  $n, k$  zwei ganze Zahlen

**Output**  $\binom{n}{k}$

### Instructions

- ▶ Wenn  $k < 0$  oder  $k > n$ :
  - ▶ Gib 0 zurück.
- ▶ Sonst:
  - ▶ Setze  $N = 1$  und  $Z = 1$ .
  - ▶ Für  $i$  von  $n - k + 1$  bis  $n$ :
    - ▶ Setze  $Z = Z * i$ .
  - ▶ Für  $i$  von 1 bis  $k$ :
    - ▶ Setze  $N = N * i$ .
  - ▶ Gib  $Z/N$  zurück.

# Binomialkoeffizienten

## Algorithmus

**Input**  $n, k$  zwei ganze Zahlen

**Output**  $\binom{n}{k}$

### Instructions

- ▶ Wenn  $k < 0$  oder  $k > n$ :
  - ▶ Gib 0 zurück.
- ▶ Sonst:
  - ▶ Setze  $N = 1$  und  $Z = 1$ .
  - ▶ Für  $i$  von  $n - k + 1$  bis  $n$ :
    - ▶ Setze  $Z = Z * i$ .
  - ▶ Für  $i$  von 1 bis  $k$ :
    - ▶ Setze  $N = N * i$ .
  - ▶ Gib  $Z/N$  zurück.

```
proc binomi (int n, int k)
{
  if ((k < 0) or (k > n))
  {
    return(0);
  }
  else
  {
    int N,Z = 1,1;
    for (int i=n-k+1;i<=n;i++)
    {
      Z = Z * i;
    }
    for (i=1;i<=k;i++)
    {
      N = N * i;
    }
    return (Z div N);
  }
}
```

# Minimum in einem Vektor

## Algorithmus

**Input**  $v = (v_1, \dots, v_k)$  Vektor ganzer Zahlen

**Output**  $\min\{v_1, \dots, v_k\}$

### Instructions

- ▶ Setze  $s = v_1$ .
- ▶ Für  $i$  von 2 bis zur Länge des Vektors:
  - ▶ Wenn  $v_i < s$ :
    - ▶ Dann setze  $s = v_i$ .
- ▶ Gib  $s$  zurück.

# Minimum in einem Vektor

## Algorithmus

**Input**  $v = (v_1, \dots, v_k)$  Vektor ganzer Zahlen

**Output**  $\min\{v_1, \dots, v_k\}$

### Instructions

- ▶ Setze  $s = v_1$ .
- ▶ Für  $i$  von 2 bis zur Länge des Vektors:
  - ▶ Wenn  $v_i < s$ :
    - ▶ Dann setze  $s = v_i$ .
- ▶ Gib  $s$  zurück.

```
proc minimum (intvec v)
{
    int s=v[1];
    for (int i=2;i<=size(v);i++)
    {
        if (v[i] < s)
        {
            s=v[i];
        }
    }
    return(s);
}
example
{
    "EXAMPLE:";
    echo=2;
    intvec v=3,2,5,2,1;
    minimum(v);
}
```

# Zeilentausch

## Algorithmus

**Input**  $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}(m \times n, R)$   
und  $1 \leq k, l \leq m$ .

**Output**  $A$  mit den Zeilen  $k$  und  $l$   
vertauscht.

## Instructions

- ▶ Definiere eine Hilfsvariable  $b$ .
- ▶ Für  $i$  von 1 bis zur Anzahl der Spalten von  $A$ :
  - ▶ Setze  $b = a_{ki}$ .
  - ▶ Setze  $a_{ki} = a_{li}$ .
  - ▶ Setze  $a_{li} = b$ .
- ▶ Gib  $A$  zurück.

# Zeilentausch

## Algorithmus

**Input**  $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}(m \times n, R)$   
und  $1 \leq k, l \leq m$ .

**Output**  $A$  mit den Zeilen  $k$  und  $l$   
vertauscht.

## Instructions

- ▶ Definiere eine Hilfsvariable  $b$ .
- ▶ Für  $i$  von 1 bis zur Anzahl der Spalten von  $A$ :
  - ▶ Setze  $b = a_{ki}$ .
  - ▶ Setze  $a_{ki} = a_{li}$ .
  - ▶ Setze  $a_{li} = b$ .
- ▶ Gib  $A$  zurück.

```
proc zeilentausch (matrix A,  
                  int k, int l)  
{  
    poly b;  
    for (int i=1;i<=ncols(A);i++)  
    {  
        b=A[k,i];  
        A[k,i]=A[l,i];  
        A[l,i]=b;  
    }  
    return(A);  
}
```

## Zeilentausch – Alternative

```
proc zeilentausch (matrix A,  
                  int k, int l)  
{  
  poly b;  
  for (int i=1;i<=ncols(A);i++)  
  {  
    b=A[k,i];  
    A[k,i]=A[l,i];  
    A[l,i]=b;  
  }  
  return(A);  
}
```

```
proc zeilentausch (matrix A,  
                  int k, int l)  
{  
  int n=ncols(A);  
  matrix B[1][n]=A[k,1..n];  
  A[k,1..n] = A[l,1..n];  
  A[l,1..n]=B;  
  return(A);  
}
```

# Zeilenvielfaches

## Algorithmus

**Input**  $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}(m \times n, R)$   
und  $1 \leq k \leq m$  und  $\lambda \in R$ .

**Output**  $A$  mit den Zeile  $k$  mit  $\lambda$  multipliziert.

## Instructions

- ▶ Für  $i$  von 1 bis zur Anzahl der Spalten von  $A$ :
  - ▶ Setze  $a_{ki} = \lambda \cdot a_{ki}$ .
- ▶ Gib  $A$  zurück.

# Zeilenvielfaches

## Algorithmus

**Input**  $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}(m \times n, R)$   
und  $1 \leq k \leq m$  und  $\lambda \in R$ .

**Output**  $A$  mit den Zeile  $k$  mit  $\lambda$  multipliziert.

## Instructions

- ▶ Für  $i$  von 1 bis zur Anzahl der Spalten von  $A$ :
  - ▶ Setze  $a_{ki} = \lambda \cdot a_{ki}$ .
  
- ▶ Gib  $A$  zurück.

```
proc zeilenvielfaches (matrix A,  
                        int k, poly p)  
{  
    for (int i=1;i<=ncols(A);i++)  
    {  
        A[k,i]=p*A[k,i];  
    }  
    return(A);  
}
```

# Elementare Zeilenoperation

## Algorithmus

**Input**  $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}(m \times n, R)$   
und  $1 \leq k, l \leq m$  und  $\lambda \in R$ .

**Output**  $A$  mit  $\lambda$ -faches von Zeile  $k$   
zu Zeile  $l$  addiert.

## Instructions

- ▶ Für  $i$  von 1 bis zur Anzahl der Spalten von  $A$ :
  - ▶ Setze  $a_{li} = a_{li} + \lambda \cdot a_{ki}$ .
- ▶ Gib  $A$  zurück.

# Elementare Zeilenoperation

## Algorithmus

**Input**  $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}(m \times n, R)$   
und  $1 \leq k, l \leq m$  und  $\lambda \in R$ .

**Output**  $A$  mit  $\lambda$ -faches von Zeile  $k$   
zu Zeile  $l$  addiert.

## Instructions

- ▶ Für  $i$  von 1 bis zur Anzahl der Spalten von  $A$ :
  - ▶ Setze  $a_{li} = a_{li} + \lambda \cdot a_{ki}$ .
- ▶ Gib  $A$  zurück.

```
proc elementarezeilenoperation
(matrix A, int k, poly p, int l)
{
  for (int i=1;i<=ncols(A);i++)
  {
    A[l,i]=A[l,i]+p*A[k,i];
  }
  return(A);
}
```

# Der Gauß-Algorithmus (rekursiv – [LA-Skript, Alg. 7.10])

## Notation

- ▶  $A_{11}$  = Teilmatrix von  $A$  ohne 1. Zeile und Spalte
- ▶  $A_1$  = Teilmatrix von  $A$  ohne 1. Spalte

## Algorithmus

**Input**  $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}(m \times n, K)$ .

**Output** Eine Zeilen-Stufen-Form von  $A$ .

## Instructions

- ▶ Durchlaufe die erste Spalte von oben nach unten, bis ein Element  $a_{i1} \neq 0$  gefunden wurde oder das Ende der Spalte erreicht ist.
- ▶ Wenn ein  $a_{i1} \neq 0$  gefunden wurde:
  - ▶ Vertausche die Zeilen  $a_1$  und  $a_i$ .
  - ▶ Für  $k = 2, \dots, m$  addiere zur  $k$ -ten Zeile das  $-\frac{a_{k1}}{a_{11}}$ -fache der ersten.
  - ▶ Bilde dann die Untermatrix  $A_{11}$  von  $A$ .
- ▶ Sonst bilde eine Untermatrix  $A_1$ .
- ▶ Wende den Algorithmus auf die gebildete Untermatrix von  $A$  an und ersetze diese in  $A$  durch das Ergebnis.
- ▶ Gib  $A$  zurück.

# Der Gauß-Algorithmus (rekursiv – [LA-Skript, Alg. 7.10])

## Notation

- ▶  $A_{11}$  = Teilmatrix von  $A$  ohne 1. Zeile und Spalte
- ▶  $A_1$  = Teilmatrix von  $A$  ohne 1. Spalte

## Algorithmus

**Input**  $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}(m \times n, K)$ .

**Output** Eine Zeilen-Stufen-Form von  $A$ .

### Instructions

- ▶ Setze  $i = 1$ .
- ▶ Solange  $a_{i1} = 0$  und  $i < m$ :
  - ▶ Setze  $i = i + 1$ .
- ▶ Wenn  $a_{i1} \neq 0$ :
  - ▶ Tausche in  $A$  die Zeilen 1 und  $i$ .
  - ▶ Für  $k = 2$  bis  $m$ :
    - ▶ Addiere in  $A$  das  $-\frac{a_{k1}}{a_{i1}}$ -fache der ersten Zeile zur  $k$ -ten Zeile.
- ▶ Wenn  $m > 1$  und  $n > 1$ :
  - ▶ Wenn  $a_{11} \neq 0$ :
    - ▶ Wende den Algorithmus auf  $A_{11}$  an und ersetze  $A_{11}$  in  $A$  durch das Ergebnis.
  - ▶ Sonst:
    - ▶ Wende den Algorithmus auf  $A_1$  an und ersetze  $A_1$  in  $A$  durch das Ergebnis.
- ▶ Gib  $A$  zurück.

# Reduzierte Zeilen-Stufen-Form

([LA-Skript, Alg. 7.10])

## Algorithmus

**Input**  $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}(m \times n, K)$ .

**Output** Die reduzierte Zeilen-Stufen-Form von  $A$ .

### Instructions

- ▶ Ersetze  $A$  durch eine Zeilen-Stufen-Form von  $A$ .
- ▶ Durchlaufe alle Zeilen von  $A$  beginnend mit der letzten (Laufindex  $i$ ):
  - ▶ Finde in der  $i$ -ten Zeile das erste Element  $a_{ij}$  ungleich 0.
  - ▶ Teile die  $i$ -te Zeile durch  $a_{ij}$ .
  - ▶ Für  $k$  von 1 bis  $i - 1$  addiere dann das  $-a_{kj}$ -fache der  $i$ -ten Zeile zur  $k$ -ten Zeile.
- ▶ Gib  $A$  zurück.

## Algorithmus

**Input**  $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}(m \times n, K)$ .

**Output** Die reduzierte Zeilen-Stufen-Form von  $A$ .

### Instructions

- ▶ Ersetze  $A$  durch eine Zeilen-Stufen-Form von  $A$ .
- ▶ Für  $i$  von  $m$  bis 1:
  - ▶ Setze  $j = 1$ .
  - ▶ Solange  $a_{ij} = 0$  und  $j < n$ :
    - ▶ Setze  $j = j + 1$ .
  - ▶ Wenn  $a_{ij} \neq 0$ :
    - ▶ Multipliziere die  $i$ -te Zeile mit  $\frac{1}{a_{ij}}$ .
    - ▶ Für  $k$  von 1 bis  $i - 1$ :
      - ▶ Addiere das  $-a_{kj}$ -fache der  $i$ -ten Zeile zur  $k$ -ten Zeile.
- ▶ Gib  $A$  zurück.

## Algorithmus

**Input**  $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}(m \times n, K)$ .

**Output**  $\text{rang}(A)$

### Instructions

- ▶ Überführe  $A$  in ZSF.
- ▶ Zähle die Anzahl  $r$  der Nicht-Nullzeilen in der ZSF.
- ▶ Gib  $r$  zurück.

## Algorithmus

**Input**  $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}_n(K)$ .

**Output**  $A^{-1}$

### Instructions

- ▶ Erweitere die Matrix  $A$  um  $\mathbb{1}_n$  zu  $C = (A, \mathbb{1}_n) \in \text{Mat}(n \times 2n, K)$ .
- ▶ Überführe  $C$  in reduzierte ZSF  $C' = (A', B)$ .
- ▶ Falls  $\text{rang}(A') = n$ , dann gib  $B$  zurück, sonst eine Fehlermeldung.

## Algorithmus

**Input**  $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}(m \times n, K)$ .

**Output** Normalform  $\text{NF}(A)$  von  $A$  bezüglich Äquivalenz sowie die zugehörigen Transformationsmatrizen  $S \in \text{Gl}_m(K)$  und  $T \in \text{Gl}_n(K)$

### Instructions

- ▶ Überführe  $A$  durch Zeilenoperationen in reduzierte ZSF und überführe  $\mathbb{1}_m$  durch die selben Zeilenoperationen in eine Matrix  $S$ .
- ▶ Überführe  $A$  durch Spaltenoperationen in Normalform und überführe  $\mathbb{1}_n$  durch die selben Spaltenoperationen in eine Matrix  $T$ .
- ▶ Gib die Normalform von  $A$  sowie die Matrizen  $S$  und  $T$  zurück.

## Algorithmus

**Input** Ein Erzeugendensystem  $F$  des Unterraums  $U \subseteq K^n$ .

**Output** Eine Basis von  $U$ .

### Instructions

- ▶ Schreibe die Vektoren von  $F$  als Zeilen in eine Matrix  $A$  und überführe  $A$  in Zeilen-Stufen-Form.
- ▶ Gib die ersten  $\text{rang}(A)$  Zeilen als Vektoren zurück.

## Algorithmus

**Input**  $A \in \text{Mat}(m \times n, K)$ .

**Output** Meldung, ob  $f_A$  injektiv, surjektiv oder bijektiv ist.

### Instructions

- ▶ Bestimme den Rang  $r$  von  $A$ .
- ▶ Ist  $r = m = n$ , gib " $f_A$  ist bijektiv" zurück. Ist  $r = m < n$ , gib " $f_A$  ist surjektiv" zurück. Ist  $r = n < m$ , gib " $f_A$  ist injektiv" zurück.

## Algorithmus

**Input** Erzeugendensysteme  $F$  und  $G$  von zwei Unterräumen  $U$  und  $U'$  des  $K^n$ .

**Output** Eine Basis von  $U + U'$ .

### Instructions

- ▶ Bilde aus  $F$  und  $G$  ein Erzeugendensystem und berechne mittels des Basis-Algorithmus' eine Basis von  $U + U' = \langle F \cup G \rangle$ .
- ▶ Gib diese Basis zurück.

## Algorithmus

**Input** Eine Familie  $F$  von  $m$  Vektoren in  $K^n$ .

**Output** Eins, falls  $F$  linear unabhängig ist, Null sonst.

### Instructions

- ▶ Ist  $F$  leer, gib Eins zurück, sonst schreibe die Vektoren in  $F$  als Spalten in eine Matrix  $A$ .
- ▶ Ist  $\text{rang}(A) = m$ , so gib Eins zurück, sonst Null.

## Algorithmus

**Input**  $A \in \text{Mat}(m \times n, K)$ .

**Output** Eine Basis von  $\text{Im}(f_A)$ .

### Instructions

- ▶ Transponiere  $A$  und überführe die Transponierte in ZSF.
- ▶ Transponiere das Ergebnis wieder und gib die ersten  $\text{rang}(A)$  Spaltenvektoren zurück.

# Lösung eines LGS

([LA-Skript, Alg. 8.10])

## Algorithmus

**Input** Die erweiterte Koeffizientenmatrix  $(A | b) \in \text{Mat}(m \times (n + 1), K)$  eines LGS  $Ax = b$ .

**Output** Eine spezielle Lösung  $c$  von  $Ax = b$  und eine Basis  $B$  von  $\text{Lös}(A, 0)$ , sofern das Gleichungssystem lösbar ist.

## Instructions

- ▶ Berechne eine reduzierte Zeilen-Stufen-Form  $(A' | b')$  von  $(A | b)$  mit  $r = \text{rang}(A')$ .
- ▶ Ist  $\text{rang}(A) < \text{rang}(A' | b')$ , dann ist das LGS nicht lösbar.
- ▶ Überführe  $(A' | b')$  in eine  $n \times (n+1)$ -Matrix  $(A'' | b'')$  durch Einfügen und Streichen von Nullzeilen, so daß die Pivotelemente anschließend auf der Diagonale der Matrix  $A''$  stehen.
- ▶ Ersetze jede Null auf der Diagonale von  $A''$  durch  $-1$ .
- ▶ Die spezielle Lösung ist  $c := b''$  und die Spalten von  $A''$ , die eine  $-1$  auf der Diagonale haben, sind eine Basis von  $\text{Lös}(A, 0)$ .

# Kern von $f_A$ ([LA-Skript, Alg. 8.12])

## Algorithmus

**Input**  $A \in \text{Mat}(m \times n, K)$ .

**Output** Eine Basis von  $\text{Ker}(f_A)$ .

### Instructions

- ▶ Bestimme eine Lösung  $(c, B)$  von  $Ax = 0$ .
- ▶ Gib  $B$  als Basis zurück.

## Algorithmus

**Input** Zwei Basen  $B = (b_1, \dots, b_n)$  und  $B' = (b'_1, \dots, b'_n)$  im  $K^n$ .

**Output** Die Transformationsmatrix  $T_{B'}^B$ .

### Instructions

- ▶ Schreibe die Vektoren  $b'_1, \dots, b'_n, b_1, \dots, b_n$  in dieser Reihenfolge als Spalten in eine Matrix  $A$ .
- ▶ Bringe  $A$  auf reduzierte ZSF.
- ▶ Die letzten  $n$  Spalten von  $\text{rZSF}(A)$  sind  $T_{B'}^B$ .

## Algorithmus

**Input** Eine Matrix  $\in \text{Mat}(m \times n, K)$ , eine Basis  $B = (b_1, \dots, b_n)$  von  $K^n$  und eine Basis  $D = (d_1, \dots, d_m)$  im  $K^m$ .

**Output** Die Matrixdarstellung  $M_D^B(f_A)$ .

## Instructions

- ▶ Schreibe die Vektoren  $d_1, \dots, d_m, A \circ b_1, \dots, A \circ b_n$  in dieser Reihenfolge als Spalten in eine Matrix  $M$ .
- ▶ Bringe  $M$  auf reduzierte ZSF.
- ▶ Die letzten  $n$  Spalten von  $\text{rZSF}(M)$  sind  $M_D^B(f_A)$ .

## Algorithmus

**Input** Eine Basis  $B = (x_1, \dots, x_n)$  und eine linear unabhängige Familie  $F = (y_1, \dots, y_r)$  von Vektoren in  $V = \text{Lin}(B) \subseteq K^n$ .

**Output** Eine Basis  $B'$  von  $V$ , die  $F$  und Vektoren aus  $B$  enthält.

### Instructions

- ▶ Für  $i = 1, \dots, r$  tue:
  - ▶ Schreibe die Vektoren in  $B$  als Spalten in eine Matrix  $A$ .
  - ▶ Bilde die erweiterte Matrix  $(A, y_i)$ .
  - ▶ Überführe  $(A, y_i)$  in reduzierte Zeilen-Stufen-Form und suche in der letzten Spalte den ersten Eintrag ungleich Null.
  - ▶ Streiche den entsprechenden Vektor aus  $B$  und füge  $y_i$  als letzten Vektor in  $B$  ein.
  
- ▶ Gib  $B$  zurück.

## Algorithmus

**Input** Eine Familie  $F = (x_1, \dots, x_m)$  von Vektoren im  $K^n$ .

**Output** Eine Matrix  $A \in \text{Mat}(k \times n, K)$  mit  $\text{Lös}(A, 0) = \text{Lin}(F)$ .

### Instructions

- ▶ Schreibe die Vektoren aus  $F$  als Zeilen in eine Matrix  $B \in \text{Mat}(m \times n, K)$  und bestimme eine Basis  $(y_1, \dots, y_k)$  von  $\text{Ker}(f_B) = \text{Lös}(B, 0)$ .
- ▶ Schreibe die  $y_1, \dots, y_k$  als Zeilenvektoren in eine Matrix  $A$ .
- ▶ Gib  $A$  zurück.

## Algorithmus

**Input** Zwei Familien  $F$  und  $G$  von Vektoren in  $K^n$ .

**Output** Eine Basis des Schnitts von  $\text{Lin}(F)$  und  $\text{Lin}(G)$ .

### Instructions

- ▶ Bestimme Matrizen  $A$  und  $A'$ , so daß  $\text{Lin}(F) = \text{Lös}(A, 0)$  und  $\text{Lin}(G) = \text{Lös}(A', 0)$ .
- ▶ Bilde aus den Zeilen von  $A$  und  $A'$  eine gemeinsame Matrix  $A''$ .
- ▶ Bestimme eine Basis  $B$  von  $\text{Ker}(f_{A''}) = \text{Lös}(A'', 0)$  und gib  $B$  zurück.

## Algorithmus

**Input**  $A \in \text{Mat}_n(K)$ .

**Output**  $\det(A)$ .

### Instructions

- ▶ Überführe  $A$  mittels Gauß-Algorithmus in nicht-reduzierte ZSF. Jedemal, wenn dabei zwei Zeilen vertauscht werden, ersetze eine der Zeilen durch ihr Negatives.
  
- ▶ Gib das Produkt der Diagonalelemente der ZSF zurück.

# Determinante einer Matrix (Laplace)

([LA-Skript, Alg. 10.35])

## Algorithmus

**Input**  $A \in \text{Mat}_n(K)$ .

**Output**  $\det(A)$ .

## Instructions

- ▶ Führe eine Variable  $d$  vom Typ `poly` für die Determinante ein und setze sie auf Null.
- ▶ Falls  $n = 1$ , setze  $d = a_{11}$  und gehe zu Schritt 3. Sonst tue für  $i = 1, \dots, n$ :
  - ▶ Bilde eine Hilfsmatrix  $B$  durch Streichen der ersten Spalte und der  $i$ -ten Zeile von  $A$ .
  - ▶ Rufe den Algorithmus mit  $B$  auf und merke Dir das Ergebnis in einer Hilfsvariablen  $x$ .
  - ▶ Addiere zu  $d$  die Zahl  $(-1)^{i+1} \cdot a_{i1} \cdot x$ .
- ▶ Gib  $d$  zurück.

## Algorithmus

**Input**  $A \in \text{Mat}_n(K)$ .

**Output**  $\mu_A$ .

### Instructions

- ▶ Falls  $A$  nicht quadratisch ist, gib 0 zurück.
- ▶ Bilde die Potenzen  $A^0, \dots, A^n$  und schreibe die Matrizen in Form von Spaltenvektoren der Länge  $n^2$  in eine Matrix  $X \in \text{Mat}(n^2 \times (n+1), K)$ .
- ▶ Berechne eine Basis von  $\text{Lös}(X, 0)$ .
- ▶ Verwende die Einträge des ersten Basisvektors multipliziert mit  $-1$  als Koeffizienten eines Polynoms und gib dieses zurück.

# Diagonalisierbarkeit einer rationalen Matrix über $\mathbb{C}$

## Algorithmus

**Input**  $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{Q})$ .

**Output** 1, falls  $A$  diagonalisierbar ist, sonst 0.

## Instructions

- ▶ Berechne das Minimalpolynom  $\mu_A$  von  $A$ .
- ▶ Faktoriere das Minimalpolynom  $\mu_A$ .
- ▶ Wenn  $\mu_A$  einen mehrfachen Faktor hat, gib 0 zurück, sonst 1.

## Bemerkung

- ▶  $A$  ist genau dann diagonalisierbar, wenn  $\mu_A$  keine mehrfache Nullstelle hat.
- ▶ Die Algebra lehrt uns, daß das genau dann der Fall ist, wenn  $\mu_A$  keinen mehrfachen irreduziblen Faktor hat.
- ▶ Denn: die irreduziblen Faktoren sind separabel und die Minimalpolynome ihrer Nullstellen.

# Diagonalisierung einer Matrix

([LA-Skript, Alg. 13.24])

## Algorithmus

**Input**  $A \in \text{Mat}_n(K)$ .

**Output**  $T$ , falls  $A$  über  $K$  diagonalisierbar ist, wobei  $T$  eine invertierbare Matrix ist, so daß  $T^{-1} \circ A \circ T$  eine Diagonalmatrix ist.

## Instructions

- ▶ Berechne das charakteristische Polynom von  $A$ .
- ▶ Faktorisiere das charakteristische Polynom über  $K$ . Ist einer der Faktoren nicht linear, ist  $A$  nicht diagonalisierbar (nicht einmal trigonalisierbar) und man gebe 0 zurück. Sind alle Faktoren linear, so liefert die Faktorisierung die Eigenwerte  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  sowie ihre algebraischen Vielfachheiten  $n_1, \dots, n_r$ .
- ▶ Bestimme für jeden Eigenwert  $\lambda_i$  eine Basis des Eigenraums  $\text{Eig}(A, \lambda_i)$  als Lös( $A - \lambda_i \mathbb{1}_n, 0$ ) sowie seine Dimension, d. h. die geometrische Vielfachheit von  $\lambda_i$ .
- ▶ Stimmt für jeden Eigenwert die algebraische Vielfachheit mit der geometrischen überein, so schreibe man die im 3. Schritt bestimmten Basen als Spalten in eine Matrix und erhält so  $T$ . Ferner erhält man  $D$ , indem man die Eigenwerte  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  entsprechend ihren algebraischen Vielfachheiten in der Diagonalen einer Nullmatrix einträgt.

# Elementarteiler ([LA-Skript, Alg. 14.17+Auf. 14.20])

## Algorithmus

**Input**  $A \in \text{Mat}_n(K)$ .

**Output** Liste mit den Eigenwerten von  $A$  und den Elementarteilern.

## Instructions

- ▶ Bestimme das Minimalpolynom  $\mu_A$  von  $A$  und faktorisier es.
- ▶ Wenn  $\mu_A$  nicht in Linearfaktoren zerfällt, gib eine Fehlermeldung zurück.
- ▶ Für jeden Eigenwert  $\lambda_i$  mit  $\text{mult}(\mu_A, \lambda_i) = m_i$  bestimme man für  $j = 0, \dots, m_i + 1$  die Zahlen  $r_{ij} = \text{rang}((A - \lambda_i \mathbb{1})^j)$  und berechne daraus den Vektor der Elementarteiler  $(t_{i1}, \dots, t_{im_i})$  mit

$$t_{ij} = r_{ij-1} - 2 \cdot r_{ij} + r_{ij+1}.$$

Den Eigenwert und den Vektor der Elementarteiler speichere man als  $i$ -ten Eintrag in einer Liste `nf`.

- ▶ Man gebe die Liste `nf` zurück.

# Jordansche Normalform einer Matrix

([LA-Skript, Alg. 14.15])

## Algorithmus

**Input**  $A \in \text{Mat}_n(K)$ .

**Output**  $J_A$  und  $T$  mit  $T^{-1} \circ A \circ T = J_A$ .

## Instructions

- ▶ Bestimme das Minimalpolynom  $\mu_A$  von  $A$  und faktorisier es.
- ▶ Wenn  $\mu_A$  nicht in Linearfaktoren zerfällt, gebe man eine Fehlermeldung zurück, andernfalls gilt  $\mu_A = \prod_{i=1}^r (t - \lambda_i)^{m_i}$ .
- ▶ Für  $i = 1, \dots, r$  bilde man die Matrix  $A_i = A - \lambda_i \mathbf{1}$  und führe folgende Schritte aus:
  - ▶ Berechne die Partition  $P = (k_1, \dots, k_{m_i})$  von  $n - \text{rang}(A_i^{m_i})$  mit  $k_j = \text{rang}(A_i^{j-1}) - \text{rang}(A_i^j)$  sowie das zugehörige Young-Diagramm.
  - ▶ Bestimme eine Basis  $B_{m_i}$  von Lös  $(A_i^{m_i}, 0)$  sowie eine Basis  $B_{m_i-1}$  von Lös  $(A_i^{m_i-1}, 0)$ .
  - ▶ Tausche  $B_{m_i-1}$  mittels des Satzes von Steinitz in  $B_{m_i}$  hinein und bestimme die in  $B_{m_i}$  verbliebenen Vektoren  $x_1^{m_i}, \dots, x_{k_{m_i}}^{m_i}$ .
  - ▶ Dann fülle man die ersten  $k_{m_i}$  Spalten des Young-Diagramms von  $P$  durch die Vektoren  $A_i^{m_i-1} x_1^{m_i}, \dots, A_i^0 x_{k_{m_i}}^{m_i}$  auf,  $l = 1, \dots, k_{m_i}$ .
  - ▶ Für  $j = m_i - 1, \dots, 1$  führe man folgendes aus:
    - ▶ bestimme eine Basis  $B_{j-1}$  von Lös  $(A_i^{j-1}, 0)$ ;
    - ▶ tausche  $B_{j-1}$  sowie die auf der  $j$ -ten Ebene des Young-Diagramms bereits eingetragenen Vektoren mittels des Satzes von Steinitz in  $B_j$  hinein;
    - ▶ bestimme die in  $B_j$  verbliebenen Vektoren  $x_{k_{j+1}+1}^j, \dots, x_{k_j}^j$ ;
    - ▶ für  $l = k_{j+1} + 1, \dots, k_j$  fülle die Spalten des Young-Diagramms von  $P$  mit den Vektoren  $A_i^{j-1} x_l^j, \dots, A_i^0 x_l^j$ .
  - ▶ Füge die Vektoren aus dem Young-Diagramm als Spalten in die Matrix  $T$  ein, beginnend in der linken oberen Ecke und die Spalten des Young-Diagramms von oben nach unten nacheinander durchlaufend.
- ▶ Gib  $T^{-1} \circ A \circ T$  und  $T$  zurück.

## Algorithmus

**Input**  $R$  ein euklidischer Ring mit euklidischer Funktion  $\nu$  sowie  $a, b \in R \setminus \{0\}$ .

**Output**  $g \in \text{ggT}(a, b)$  ein größter gemeinsamer Teiler von  $a$  und  $b$ .

## Instructions

- ▶ Setze  $r_0 = a$ ,  $r_1 = b$  und  $k = 2$ .
- ▶ Solange  $r_{k-1} \neq 0$ :
  - ▶ Wähle  $r_k \in R$  und  $q_{k-1} \in R$  mit
$$r_{k-2} = q_{k-1} \cdot r_{k-1} + r_k \quad \text{und} \quad (r_k = 0 \text{ oder } \nu(r_k) < \nu(r_{k-1})).$$
  - ▶ Setze  $k = k + 1$ .
- ▶ Gib  $r_{k-1}$  zurück.

## Algorithmus

**Input**  $R$  ein euklidischer Ring mit euklidischer Funktion  $\nu$  sowie  $a, b \in R \setminus \{0\}$ .

**Output**  $g \in \text{ggT}(a, b)$  ein größter gemeinsamer Teiler von  $a$  und  $b$  sowie  $x, y \in R$  mit  $g = x \cdot a + y \cdot b$ .

## Instructions

- ▶ Wähle  $q, r \in R$  mit  $a = q \cdot b + r$  und  $r = 0$  oder  $\nu(r) < \nu(b)$ .
- ▶ Wenn  $r = 0$ :
  - ▶ Gib  $g = b$ ,  $x = 0$  und  $y = 1$  zurück.
- ▶ Sonst:
  - ▶ Wende den Algorithmus auf  $b$  und  $r$  an und berechne so  $g, u, v \in R$  mit  $g \in \text{ggT}(b, r)$  und  $g = u \cdot b + v \cdot r$ .
  - ▶ Gib  $g$  sowie  $x = v$  und  $y = u - q \cdot v$  zurück.

## Algorithmus

**Input**  $a = (a_1, \dots, a_k)$  und  $n = (n_1, \dots, n_k)$  zwei Vektoren ganzer Zahlen, so daß die  $n_i$  paarweise teilerfremd sind.

**Output**  $x \in \mathbb{Z}$  mit  $0 \leq x < n_1 \cdot \dots \cdot n_k$  und  $x \equiv a_i \pmod{n_i}$  für alle  $i = 1, \dots, k$ .

## Instructions

- ▶ Für  $i$  von 1 bis  $k$ :
  - ▶ Berechne ein  $x_i \in \mathbb{Z}$  mit  $\bar{x}_i = \overline{N_i}^{-1} \in \mathbb{Z}_{n_i}$  für  $N_i = \frac{n_1 \cdot \dots \cdot n_k}{n_i}$ .
- ▶ Berechne die Summe  $x' = \sum_{i=1}^k x_i \cdot a_i \cdot N_i$ .
- ▶ Berechne ein  $0 \leq x < n_1 \cdot \dots \cdot n_k$  mit  $x \equiv x' \pmod{n_1 \cdot \dots \cdot n_k}$ .
- ▶ Gib  $x$  zurück.

# Quadratwurzel ([GdM-Skript, Bsp. 11.23])

## Algorithmus

**Input**  $c \in \mathbb{Q}_{>0}$  und  $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ .

**Output**  $q \in \mathbb{Q}$ , so daß  $q^2$  bis auf  $n$  Dezimalstellen mit  $c$  übereinstimmt.

## Instructions

- ▶ Setze  $q = 1$ .
- ▶ Solange  $q^2$  mit  $c$  noch nicht bis auf  $n$  Dezimalstellen übereinstimmt:
  - ▶ Setze  $q = \frac{1}{2} \cdot \left( q + \frac{c}{q} \right)$ .
- ▶ Gib  $q$  zurück.

# Positive Definitheit

([LA-Skript, Satz 16.36])

## Algorithmus

**Input**  $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ .

**Output** 1, wenn  $A$  symmetrisch und positiv definit, 0 sonst.

## Instructions

- ▶ Wenn  $A = A^t$ :
  - ▶ Überprüfe, ob alle Hauptminoren positiv sind.
  - ▶ Wenn ja:
    - ▶ Gib 1 zurück
  - ▶ Sonst:
    - ▶ Gib 0 zurück.

## Bemerkung

- ▶ OGB = Basis, deren Vektoren paarweise senkrecht aufeinander stehen
- ▶  $b_A(x, y) = x^t \circ A \circ y$  definiert Skalarprodukt, wenn  $A$  positiv definit

## Algorithmus

**Input**  $M$  eine Familie von Vektoren in  $\mathbb{R}^n$  und ein  $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$  eine positive definite symmetrische Matrix.

**Output** Orthogonalbasis  $B$  von  $\text{Lin}(M)$  bezüglich des durch  $A$  definierten Skalarproduktes  $b_A$ .

## Instructions

- ▶ Bestimme eine Basis  $B = (x_1, \dots, x_r)$  von  $\text{Lin}(M)$ .
- ▶ Für  $i$  von 1 bis  $r$ :
  - ▶ Berechne die Summe  $y_i = x_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{b_A(y_j, x_i)}{b_A(y_j, y_j)} \cdot y_j$ ;
- ▶ Gib die veränderte Basis  $(y_1, \dots, y_r)$  zurück.

## Algorithmus

**Input**  $M$  eine Familie von Vektoren in  $\mathbb{R}^n$  und ein  $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$  eine positive definite symmetrische Matrix.

**Output** Orthonormalbasis  $B$  von  $\text{Lin}(M)$  bezüglich des durch  $A$  definierten Skalarproduktes  $b_A$ .

## Instructions

- ▶ Bestimme eine OGB  $B = (x_1, \dots, x_r)$  von  $\text{Lin}(M)$  bez.  $b_A$ .
- ▶ Für  $i$  von 1 bis  $r$ :
  - ▶ Setze  $y_i = \frac{1}{\sqrt{b_A(x_i, x_i)}}$ .
- ▶ Gib  $(y_1, \dots, y_r)$  zurück.

## Algorithmus

**Input**  $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{Q})$  normal, so dass  $\chi_A$  über  $\mathbb{Q}$  zerfällt.

**Output** Diagonalmatrix  $D$  und orthogonale Matrix  $T$  mit  $D = T^{-1} \circ A \circ T$ .

## Instructions

- ▶ Berechne eine Diagonalmatrix  $D$  und eine invertierbare Matrix  $S$  mit  $D = S^{-1} \circ A \circ S$  mit dem Diagonalisierungsalgorithmus.
- ▶ Für jeden Eigenwert von  $A$  berechne für die von den zugehörigen Spalten in  $S$  erzeugten Unterraum eine ONB und ersetze die Spalten in  $S$  durch diese.
- ▶ Gib  $S$  zurück.

# Symmetrischer Gaußalgorithmus

([LA-Skript, Alg. 18.26])

## Algorithmus

**Input**  $A \in \text{Mat}_n(K)$  symmetrisch und  $T \in \text{Gl}_r(K)$  mit  $r \geq n$  wobei  $\text{char}(K) \neq 2$ .

**Output**  $T \in \text{Gl}_r(K)$  so, daß  $\tilde{T}^t \circ A \circ \tilde{T}$  eine Diagonalmatrix ist, wobei  $\tilde{T}$  durch Streichen der ersten  $r - n$  Spalten und Zeilen aus  $T$  entsteht.

## Instructions

- ▶ Setze  $m = r - n$ .
- ▶ Man suche in der ersten Spalte von  $A$  den ersten Eintrag, der nicht Null ist. Existiert ein solcher, merke man sich die Zeilennummer  $z$ , sonst gehe man zu Schritt 5.
- ▶ Ist  $z \neq 1$ , so addiere die  $z$ -te Zeile von  $A$  zur ersten und die  $z$ -te Spalte zur ersten. Addiere ferner die  $z + m$ -te Spalte von  $T$  zur  $m + 1$ -ten Spalte.
- ▶ Für  $k = 2, \dots, n$  addiere man das  $-A[1, k]/A[1, 1]$ -fache der ersten Zeile von  $A$  zur  $k$ -ten und das  $-A[1, k]/A[1, 1]$ -fache der ersten Spalte zur  $k$ -ten. Sodann addiere man das  $-A[1, k]/A[1, 1]$ -fache der  $1 + m$ -ten Spalte von  $T$  zur  $k + m$ -ten.
- ▶ Falls  $n > 1$ , dann erzeuge man eine Matrix  $B$ , indem man aus  $A$  die erste Zeile und die erste Spalte streicht. Sodann rufe man die Prozedur mit den Parametern  $B$  und  $T$  auf und speichere das Ergebnis in  $T$ .
- ▶ Man gebe  $T$  zurück.

# Duale Basis

([LA-Skript, Alg. 19.10])

## Algorithmus

**Input**  $A \in \text{Mat}_n(K)$ , so daß die Spalten eine Basis des  $K^n$  sind.

**Output**  $B \in \text{Mat}_n(K)$ , deren Spalten die zu den Spalten von  $A$  duale Basis sind.

## Instructions

- ▶ Berechne die Inverse  $C = A^{-1}$  von  $A$ .
- ▶ Gib  $B = C^t$  zurück.

# Reine Tensoren ([LA-Skript, Satz. 20.29])

## Algorithmus

**Input**  $A \in \text{Mat}(m \times n, K)$  vom Rang  $\text{rang}(A) = 1$ .

**Output** Vektoren  $u \in K^m$  und  $v \in K^n$ , so daß  $A = u \circ v^t$ .

## Instructions

- ▶ Berechne invertierbare Matrizen  $S$  und  $T$ , so daß  $S \circ A \circ T$  in Normalform bezüglich Äquivalenz ist.
- ▶ Berechne  $u = S^{-1} \circ e_1$  und  $v = (T^{-1})^t \circ f_1$ , wenn  $e_1$  und  $f_1$  die ersten kanonischen Basisvektoren im  $K^m$  bzw. im  $K^n$  sind.

## Algorithmus

**Input**  $A \in \text{Mat}(m \times n, K)$ .

**Output**  $r = \text{rang}(A)$  Matrizen  $A_1, \dots, A_r$  vom Rang 1, so dass  $A = A_1 + \dots + A_r$ .

## Instructions

- ▶ Berechne invertierbare Matrizen  $S$  und  $T$ , so daß  $S \circ A \circ T$  in Normalform bezüglich Äquivalenz ist.
- ▶ Für  $i$  von 1 bis  $r = \text{rang}(A)$ :
  - ▶ Setze  $A_i = S^{-1} \circ E_{ii} \circ T^{-1}$ , wobei  $E_{ii} \in \text{Mat}(m \times n, K)$  an der Stellen  $(i, i)$  eine Eins als Eintrag hat und sonst nur Nullen.
- ▶ Gib  $(A_1, \dots, A_r)$  zurück.

# Minimalpolynom

- ▶ Sei  $K \subseteq L$  eine Körpererweiterung.
- ▶  $\alpha \in L$  heißt **algebraisch über  $K$** , wenn der Einsetzhomomorphismus

$$\phi_\alpha : K[t] \longrightarrow L : f \mapsto f(\alpha)$$

nicht injektiv ist.

- ▶ Im Hauptidealring  $K[t]$  wird der Kern von  $\phi_\alpha$  dann von einem eindeutig bestimmten normierten Polynom  $\mu_\alpha$  erzeugt, das das **Minimalpolynom** von  $\alpha$  genannt wird.
- ▶ Ziel:
  - ▶  $\alpha \in L$  algebraisch über  $K$  mit Minimalpolynom  $\mu_\alpha \in K[t]$ .
  - ▶  $\beta \in L$  algebraisch über  $K[\alpha]$  mit Minimalpolynom  $\mu_\beta \in K[\alpha][s]$ .
  - ▶ Finde das Minimalpolynom von  $\alpha + \beta$  über  $K$ .
  - ▶ D.h. berechne den Kern von  $\phi_{\alpha+\beta}$ .
- ▶ SINGULAR kann Kerne von Ringhomomorphismen berechnen.

# Minimalpolynom von $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ über $\mathbb{Q}$ in SINGULAR

SINGULAR

A Computer Algebra System for Polynomial Computations

by: W. Decker, G.-M. Greuel, G. Pfister, H. Schoenemann  
FB Mathematik der Universitaet, D-67653 Kaiserslautern

```
> ring r=0,x,lp;  
> ring R=0,(s,t),lp;  
> qring Q=std(ideal(t2-2,s2-3));  
> map phi=r,s+t;  
> setring r;  
> kernel(Q,phi);  
_[1]=x4-10x2+1  
>
```

- ▶ Frage: Wie geht so das?
- ▶ Antwort: Gröbnerbasen!
- ▶ Das lernt man in einer Vorlesung zur Computeralgebra!

# Literaturverzeichnis

-  Thomas Keilen: Kurzeinführung in SINGULAR . Skript 1999.
-  Thomas Markwig: Algebraische Strukturen. Vorlesungsskript 2020.
-  Thomas Markwig: Grundlagen der Mathematik. Vorlesungsskript 2015.
-  Thomas Markwig: Lineare Algebra. Vorlesungsskript 2020.